Décompositions paradoxales

Marc Hoyois

17 février 2007

Table des matières

Introduction **2**

1 Notions élémentaires **3**
- 1.1 Congruence, équidécomposabilité et paradoxalité 3
- 1.2 Groupes libres, actions libres et actions localement commutatives 6
- 1.3 Systèmes de congruences 8
- 1.4 Congruence par dissection 13
- 1.5 Le monoïde des types d'équidécomposabilité 14

2 Le paradoxe de Banach–Tarski et ses généralisations **20**
- 2.1 Le paradoxe de Hausdorff 20
- 2.2 Le théorème de Banach–Tarski dans $\mathbf{R}^3$ 21
- 2.3 Cinq morceaux suffisent 22
- 2.4 Généralisations à $\mathbf{R}^d$ 23
- 2.5 Le paradoxe de Banach–Tarski généralisé au continu 24

3 Paradoxes dans le plan **29**
- 3.1 La paradoxalité dénombrable de $\mathbf{S}^1$ 29
- 3.2 Le paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz 29
- 3.3 Le paradoxe de von Neumann dans le plan 30
- 3.4 Le problème de la quadrature du cercle de Tarski 32

4 Mesures universelles invariantes et moyennabilité **34**
- 4.1 Moyennabilité 34
- 4.2 Le théorème de Tarski 37
- 4.3 Supramoyennabilité et croissance d'un groupe 39
- 4.4 Théorèmes d'extensions 42
- 4.5 Applications 45

Appendices **47**
- A Équidécomposabilité continue 47
- B La mesure de Jordan 50

Introduction

Le paradoxe de Banach–Tarski est souvent cité comme le résultat mathématique connu le plus surprenant. Il affirme que dans l'espace euclidien une boule est isométrique par morceaux à deux boules disjointes de même rayon que la boule originale. Plus généralement, on peut en déduire que n'importe quelles parties de l'espace bornées et d'intérieurs non vides sont isométriques par morceaux. Bien sûr, le terme *isométrique par morceaux* sous-entend un nombre *fini* de morceaux, sans quoi ces assertions ne seraient que des manifestations banales de résultats bien connus sur les ensembles infinis. Malgré le scepticisme à l'égard de ces théorèmes dont on peut faire preuve au premier abord, une brève réflexion nous amène à constater que ces assertions ne contredisent, *a priori*, aucun fait bien connu. En effet, si les isométries doivent préserver les aires des parties mesurables de l'espace, les isométries *par morceaux* ne connaissent pas une telle contrainte, car une partie mesurable peut être décomposée en parties non mesurables. Ce raisonnement montre immédiatement que les morceaux en question apparaissant dans la duplication d'une boule ne sont pas tous mesurables.

La découverte de ce paradoxe en 1923 par les mathématiciens Stefan Banach et Alfred Tarski [1], qui elle-même survient après la découverte en 1914 d'un résultat similaire par Felix Hausdorff concernant les sphères [8], a par la suite motivé le développement d'une théorie plus générale basée sur la notion d'*équidécomposabilité* dans un ensemble muni d'une action de groupe. Des résultats encore plus surprenant seront alors découverts, comme cet énoncé : *on peut extraire d'une boule autant de parties qu'il y a de nombres réels de telle manière que chaque partie soit isométrique par morceaux à la boule toute entière*. C'est cette théorie, encore en plein développement aujourd'hui, qui fait l'objet principal de cet article.

Dans le premier chapitre sont exposés les notions élémentaires et les résultats fondamentaux de la théorie des décompositions paradoxales, notamment concernant la résolution de systèmes généraux de congruences. Le chapitre 2 est consacré au paradoxe de Banach–Tarski, ses conséquences et ses généralisations ; nous verrons en particulier qu'il suffit de cinq morceaux pour réaliser le paradoxe de Banach–Tarski. Comme souvent en mathématique, le plan et la droite échappent à de telles généralisations, et c'est pourquoi nous nous écartons un peu de la théorie générale dans le chapitre 3 pour exposer certains résultats particuliers dans ces espaces de petites dimensions. Le lien fondamental entre la théorie des décompositions paradoxales et celle des groupes discrets moyennables, matérialisé par le théorème de Tarski, sera démontré dans le chapitre 4, et les résultats élémentaires sur les groupes moyennables y seront exposés.

Une question naturelle se pose. Est-ce que ces « paradoxes » peuvent être réalisés *physiquement* ? Si l'on convient que « physiquement » signifie en utilisant des isométries directes et en effectuant les déplacement des morceaux non pas instantanément mais continûment sans que ceux-ci ne se chevauchent, alors nous verrons que la réponse est affirmative dans la plupart des cas, en particulier pour le paradoxe de Banach–Tarski. Ce résultat qui renforce le caractère surprenant de ces paradoxes a été démontré en 2005 par Trevor M. Wilson [24].

Les notions élémentaires de la théorie des ensembles, de l'algèbre et de la théorie de la mesure sont supposées connues. N'importe quel ouvrage de base sur ces sujets devrait couvrir les résultats qui seront utilisés. Dans le chapitre 4, certains résultats de topologie générale seront invoqués. Dans la mesure du possible, j'ai essayé de présenter le sujet de manière suffisamment précise sans pour autant alourdir inutilement l'exposé. Lorsqu'un usage de la terminologie est non standard ou pourrait prêter à confusion (par exemple *partition*, *mesure*), il sera toujours précisé en début de section. Parfois, certains résultats seront cités sans démonstration ; leurs énoncés seront alors précédés d'une étoile, et une référence adéquate sera fournie.

Le cadre formel qui sera utilisé tacitement est la théorie ZFC, dont les axiomes sont ceux de Zermelo–Fränkel (ZF) et l'axiome du choix. Certains résultats que nous verrons sont en fait des théorèmes de ZF, mais ils sont en règle générale peu nombreux. Une exception notable est le théorème 4, dont il faut souligner le caractère constructif de la preuve. Je ferai parfois des commentaires au sujet de l'axiome du choix, en particulier pour mettre en évidence des paradoxes prouvables dans ZF. Même si de tels paradoxes sont moins surprenants que ceux qui utilisent toute la puissance de ZFC, ils aident à convaincre que l'axiome du choix n'est pas le seul responsable de ces anomalies mathématiques, mais qu'il s'agit plutôt de la richesse intrinsèque des nombres réels.

Marc Hoyois, 17 février 2007

1 Notions élémentaires

1.1 Congruence, équidécomposabilité et paradoxalité

Nous appellerons *partition* d'un ensemble X un ensemble $\mathscr{X}$ dont les éléments sont deux à deux disjoints et vérifiant $\bigcup \mathscr{X} = X$. Une *partition stricte* de X est une partition $\mathscr{X}$ de X telle que $\varnothing \notin \mathscr{X}$. Une *décomposition* de X est une partition stricte finie de X. En particulier, l'ensemble vide est à la fois l'unique partition stricte et l'unique décomposition de l'ensemble vide. [1]

Les groupes seront toujours notés multiplicativement, avec élément neutre 1. Les actions de groupes que nous considérerons seront exclusivement des actions *à gauche*. En d'autres termes, si G est un groupe et si X est un G-ensemble, alors $g(hx) = (gh)x$ pour tout x dans X et tous g et h dans G. Ceci nous permettra d'écrire ghx sans qu'une confusion n'en résulte. Parallèlement, la composition de deux applications f et g, notée $f \circ g$, est la composition *à gauche* définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Parfois, nous introduirons un ensemble de la forme $\{x_i \,|\, i \in I\}$, et nous dirons qu'il est *indicé injectivement* si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est injective. Ce n'est bien sûr pas une propriété intrinsèque à l'ensemble, mais liée à sa notation.

Soient G un groupe, X un G-ensemble et A et B des parties de X. Une application $f\colon A \to B$ est une *G-congruence* de A vers B si elle est bijective et s'il existe g dans G tel que $f(a) = ga$ pour tout a dans A. Une application $f\colon A \to B$ est une *G-congruence par morceaux* de A vers B si elle est bijective et s'il existe un entier naturel n, des éléments g_1, …, g_n de G et une décomposition de A à n éléments $\{A_1, \ldots, A_n\}$ tels que $f(a) = g_i a$ pour tout a dans A_i et pour tout i. Si nous voulons préciser l'entier n dans la définition précédente, nous dirons que f est une *G-congruence avec n morceaux* (il est alors sous-entendu que n est un entier naturel). L'ensemble A est dit *G-congruent* (resp. *G-équidécomposable* ; *G-équidécomposable avec n morceaux*) à l'ensemble B s'il existe une G-congruence (resp. G-congruence par morceaux ; G-congruence avec n morceaux) de A vers B. Les relations sur $\mathscr{P}(X)$ ainsi définies sont notées respectivement $\mathscr{C}_G$, $\mathscr{E}_G$ et $\mathscr{E}_G^n$. Explicitement, A est G-équidécomposable (avec n morceaux) à B s'il existe des décompositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A et B (à n éléments) et des éléments g_1, …, g_n de G tels que $g_i A_i = B_i$ pour tout i. Notons finalement qu'une G-congruence est une G-congruence avec 0 ou 1 morceau et réciproquement, de sorte que $\mathscr{C}_G = \mathscr{E}_G^0 \cup \mathscr{E}_G^1$.

Proposition 1. *Soit X un G-ensemble et soient A, A', B et C des parties de X avec $A' \subseteq A$. Supposons qu'il existe une G-congruence avec n morceaux f de A vers B et une G-congruence avec m morceaux g de B vers C. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *L'identité sur A est une G-congruence de A vers A.*
2. *f^{-1} est une G-congruence avec n morceaux de B vers A.*
3. *$g \circ f$ est une G-congruence avec r morceaux de A vers C, pour un certain $r \leq nm$.*
4. *$f \restriction A'$ est une G-congruence avec s morceaux de A' vers $f(A')$, pour un certain $s \leq n$.*

Preuve. Soient $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_m\}$ des décompositions de A et B respectivement et g_1, …, g_n, h_1, …, h_m des éléments de G tels que $f(a) = g_i a$ pour tout a dans A_i et $g(b) = h_j b$ pour tout b dans B_j.

1. Si 1 est l'élément neutre de G, alors $a = 1a$ pour tout a dans A, d'où l'assertion.

2. Pour tout b dans $f(A_i)$, $f^{-1}(b)$ appartient à A_i, de sorte que $b = f(f^{-1}(b)) = g_i f^{-1}(b)$. Ainsi, la décomposition $\{f(A_1), \ldots, f(A_n)\}$ de B et les éléments g_1^{-1}, …, g_n^{-1} de G sont tels que $f^{-1}(b) = g_i^{-1} b$ pour tout b dans $f(A_i)$ et pour tout i.

3. L'ensemble
$$\{g_i^{-1}(f(A_i) \cap B_j) \,|\, 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m\} \setminus \{\varnothing\}$$
est une décomposition de A avec au plus nm éléments. Pour tous i et j, si a appartient à $g_i^{-1}(f(A_i) \cap B_j)$, alors a appartient à A_i et $f(a)$ appartient à B_j, d'où $(g \circ f)(a) = h_j g_i a$.

4. L'ensemble $\{A_i \cap A' \,|\, 1 \leq i \leq n\} \setminus \{\varnothing\}$ est une décomposition de A' avec au plus n éléments. Pour tout i, si a appartient à $A_i \cap A'$, alors $(f \restriction A')(a) = g_i a$. $\square$

1. Dans la suite, nous écrirons souvent de façon générique $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une décomposition à n éléments d'un ensemble, pour un certain entier naturel n. Si n est nul, nous conviendrons que cette écriture représente l'ensemble vide.

Des propriétés 1, 2 et 3 de la proposition 1 nous obtenons :

Corollaire 2. *Pour tout G-ensemble X, $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{E}_G$ sont des relations d'équivalence sur $\mathscr{P}(X)$.*

Corollaire 3. *Soit X un G-ensemble. Pour toute partie A de X, l'ensemble des G-congruences de A vers A et l'ensemble des G-congruences par morceaux de A vers A sont des groupes pour la composition des applications.*

Soient X un G-ensemble et A et B des parties de X. Nous noterons $A \sim_G B$ (resp. $A \sim_G^n B$) lorsque A et B sont G-équidécomposables (resp. G-équidécomposables avec n morceaux).

Introduisons une dernière relation utile. Si A et B sont des parties d'un G-ensemble X, on dit que A est *G-subdécomposable* à B, et on note $A \precsim_G B$, si A est G-équidécomposable à un sous-ensemble de B. La relation ainsi définie sur $\mathscr{P}(X)$ est notée $\mathscr{S}_G$. La proposition 1 implique que $\mathscr{S}_G$ est une relation de préordre sur $\mathscr{P}(X)$.

Théorème 4. *Soit S un ensemble muni de deux relations binaires R et E satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *Pour tous a et b dans S tels que $(a, b) \in R$, il existe une application injective $f : a \to b$ telle que, pour toute partie c de a, $(c, f(c)) \in E$ et $(f(c), c) \in E$.*
2. *Pour tous a_1, a_2, b_1 et b_2 dans S, si $a_1 \cap a_2 = \varnothing$, $b_1 \cap b_2 = \varnothing$, $(a_1, b_1) \in E$ et $(a_2, b_2) \in E$, alors $(a_1 \cup a_2, b_1 \cup b_2) \in E$.*

Alors pour tous a et b dans S, $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$ impliquent $(a, b) \in E$.

Preuve. Soient a et b des éléments de S tels que $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$, et soient a' et b' des sous-ensembles respectifs de a et b avec des bijections $f : a \to b'$ et $g : b \to a'$ satisfaisant l'hypothèse 1. Posons

$$c = \bigcup \{(g \circ f)^n(a \setminus a') \mid n \in \mathbf{N}\} ;$$

c'est un sous-ensemble de a. Nous allons vérifier que $a \setminus c = g(b \setminus f(c))$.

Soit x dans $a \setminus c$. En particulier, x est dans a', donc il existe un unique y dans b tel que $x = g(y)$, car g est bijective. Or y n'appartient pas à $f(c)$, car sinon x serait dans $(g \circ f)(c) \subseteq c$. Par conséquent, x appartient à $g(b \setminus f(c))$.

Réciproquement, soit x dans $g(b \setminus f(c))$. Alors $g^{-1}(x)$ n'appartient pas à $f(c)$, donc x n'appartient pas à $(g \circ f)(c)$. D'autre part x est dans a' et n'est donc pas dans $a \setminus a'$. Vu que $c = (a \setminus a') \cup (g \circ f)(c)$, x n'appartient pas à c.

On obtient ainsi de l'hypothèse 1 d'une part que $(a \setminus c, b \setminus f(c)) \in E$ et d'autre part que $(c, f(c)) \in E$. Par l'hypothèse 2, on conclut que $(a, b) \in E$. □

Il est clair que le théorème reste vrai si S est une classe arbitraire d'ensembles et non nécessairement un ensemble lui-même (auquel cas R et E ne sont pas nécessairement des ensembles). Ainsi, en prenant pour S la classe de tous les ensembles, pour R la classe des couples (a, b) pour lesquels il existe une injection de a dans b et pour E la relation de bijection, on obtient une preuve constructive du célèbre théorème de Schröder–Bernstein.

Un autre corollaire fondamental pour l'étude de décompositions paradoxales est le théorème de Banach–Schröder–Bernstein.

Proposition 5. *Soit X un G-ensemble. Les conditions 1 et 2 du théorème 4 sont satisfaites lorsque $S = \mathscr{P}(X)$, $R = \mathscr{S}_G$ et $E = \mathscr{E}_G$.*

Preuve. Supposons que $A \precsim_G B$ pour certaines parties A et B de X. Il existe donc une G-congruence par morceaux f de A vers un sous-ensemble B' de B, qui est en particulier une injection de A dans B. Par la proposition 1, la restriction de f à tout sous-ensemble C de A est une G-congruence par morceaux de C vers $f(C)$. En d'autres termes, C et $f(C)$ sont G-équidécomposables pour tout sous-ensemble C de A, ce qui vérifie la première condition. La deuxième condition est trivialement vérifiée. □

Nous avons déjà remarqué que $\mathscr{S}_G$ est une relation de préordre. Elle est également antisymétrique modulo $\mathscr{E}_G$ par le théorème 4, d'où :

Corollaire 6 (Théorème de Banach–Schröder–Bernstein). *Pour tout G-ensemble X, $\mathscr{S}_G$ est une relation d'ordre modulo $\mathscr{E}_G$ sur $\mathscr{P}(X)$.*

La construction explicite de la preuve du théorème 4 nous donne une information très précise sur le nombre de morceaux. Avec les notations du théorème, si $f: a \to b'$ et $g: b \to a'$ sont des G-congruences avec m et n morceaux respectivement, alors $g \restriction (b \setminus f(c))$ est une G-congruence de $a \setminus c$ vers $b \setminus f(c)$ avec au plus n morceaux (proposition 1, point 4), et de même $f \restriction c$ est une G-congruence de c vers $f(c)$ avec au plus m morceaux ; par conséquent, a et b sont G-congruents avec r morceaux pour un certain $r \leq n + m$.

Voyons tout de suite un exemple d'application de ce théorème.

Proposition 7. *Soient $d \geq 1$ un entier et G le groupe des similarités de $\mathbf{R}^d$. Si A et B sont des parties de $\mathbf{R}^d$ bornées et d'intérieurs non vides, alors A et B sont G-équidécomposables avec 2 morceaux.*

Preuve. Les deux hypothèses sur A et B impliquent qu'il existe des similarités envoyant A sur un sous-ensemble de B et réciproquement. En d'autres termes, A est G-équidécomposable à un sous-ensemble de B avec un seul morceaux et réciproquement, donc A et B sont G-équidécomposables avec $1 + 1 = 2$ morceaux. □

Même si l'on pourrait généraliser la définition de G-équidécomposabilité à l'usage de partitions strictes quelconques, ceci ne présente que peu d'intérêt pour étudier des décompositions paradoxales. Cependant, le cas dénombrable vaut la peine d'être considéré.

Soit X un G-ensemble. Deux parties A et B de X sont *dénombrablement G-équidécomposables* si elles sont G-équidécomposables ou s'il existe des partitions strictes infines dénombrables $\{A_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ et $\{B_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ de A et B (indicées injectivement) telles que A_i et B_i sont G-congruents pour tout i. On définit de manière évidente la *G-subdécomposabilité dénombrable*. Les preuves des énoncés analogues aux propriétés 1, 2, 3 et 4 de la proposition 1, et par suite le théorème de Banach–Schröder–Bernstein, s'étendent sans changements majeurs au cas dénombrable. Nous utiliserons le symbole relationnel $\sim_G^\infty$ pour la G-équidécomposabilité dénombrable.

Soit X un G-ensemble. Une partie C de X est *G-paradoxale* si elle admet deux sous-ensembles disjoints A et B tels que $A \sim_G C$ et $B \sim_G C$. Une conséquence du théorème de Banach–Schröder–Bernstein est que C peut être « dupliqué », en ce sens que les parties A et $C \setminus A$ sont G-équidécomposables à l'ensemble C tout entier. En effet, les relations $C \sim_G B \precsim_G C \setminus A \precsim_G C$ forcent $C \sim_G C \setminus A$. Toutefois, cette propriété ne nous donne aucune information sur le nombre de morceaux nécessaire à la duplication de C, et il est nécessaire pour cela d'introduire une définition plus précise.

Soit X un G-ensemble. Un sous-ensemble C de X est *G-paradoxal avec n morceaux* s'il admet une partition $\{A, B\}$, $A \cap B = \varnothing$, avec $A \sim_G^r C$, $B \sim_G^s C$ et $r + s = n$.

Il convient également d'étendre cette notion au cas dénombrable. Une partie C de X est *dénombrablement G-paradoxale* si elle admet deux sous-ensembles disjoints A et B avec $A \sim_G^\infty C$ et $B \sim_G^\infty C$.

La G-paradoxalité formalise l'idée qu'un ensemble peut être dupliqué sous l'action d'un groupe en un nombre fini (ou dénombrable) d'opérations. Deux cas particulièrement intéressants seront l'action d'un groupe d'isométrie sur un espace métrique et l'action d'un groupe de transformations préservant la mesure sur un espace mesuré.

Proposition 8. *Un G-ensemble X non vide ne peut être G-paradoxal avec moins de quatre morceaux.*

Preuve. Soit A une partie de X. Si $A \sim_G^1 X$, alors il existe g dans G tel que $gA = X$, et ainsi $A = g^{-1}X = X$. Par conséquent, si $\{A, B\}$ est une décomposition de X à deux éléments avec $A \sim_G^r X \sim_G^s B$, alors $r \geq 2$ et $s \geq 2$. □

Il faut remarquer que cette proposition ne s'applique qu'aux G-ensembles, et il est tout à fait possible qu'une *partie* d'un G-ensemble soit G-paradoxale avec moins de quatre morceaux.

Proposition 9. *Soient X un G-ensemble et A et B des parties G-équidécomposables de X. Si A est G-paradoxal, alors B l'est également.*

Preuve. Soient A_1 et A_2 des sous-ensembles disjoints de A tels que $A_1 \sim_G A \sim_G A_2$. Il existe des G-congruences par morceaux f de A vers B, g_1 de A_1 vers A et g_2 de A_2 vers A. Par la proposition 1, $f \circ g_1 \circ f^{-1} \restriction f(A_1)$ est une G-congruence par morceaux de $f(A_1)$ vers B. De même, $f \circ g_2 \circ f^{-1} \restriction f(A_2)$ est une G-congruence par morceaux de $f(A_2)$ vers B. Mais vu que f est une bijection, les ensembles $f(A_1)$ et $f(A_2)$ sont disjoints, ce qui complète la preuve. $\square$

Il sera nécessaire d'étudier la paradoxalité d'un groupe agissant sur lui-même par multiplication à gauche. Un groupe G est dit *paradoxal* s'il est G-paradoxal sous cette action.

Convention. Si X est $\mathbf{R}^d$ pour un certain entier naturel d, alors le groupe agissant sur X, s'il n'est pas mentionné, sera le groupe des *déplacements* de $\mathbf{R}^d$, noté $D_d(\mathbf{R})$, c'est-à-dire le sous-groupe des isométries de $\mathbf{R}^d$ engendré par le groupe des rotations $SO_d(\mathbf{R})$ et celui des translations $T_d(\mathbf{R})$. Si A et B sont des parties de $\mathbf{R}^d$, les expressions $A \sim B$, $A \sim^n B$, $A \precsim B$ et $A \sim^\infty B$ seront utilisées en ce sens.

1.2 Groupes libres, actions libres et actions localement commutatives

Si κ est un cardinal, nous noterons F_κ un groupe libre de rang κ.

Si G est un groupe et si L est une partie de G, nous identifierons en général les mots réduits en L avec les produits correspondants dans G. Par exemple, si F_2 est engendré par a et b, alors F_2 coïncide avec l'ensemble des mots réduits en a, a^{-1}, b et b^{-1}. Lorsque G n'est pas un groupe libre, il est possible que deux mots réduits w_1 et w_2 diffèrent tandis que les éléments correspondant dans G sont identiques : lorsque nous écrirons $w_1 = w_2$, il sera entendu que cette expression met en relation des éléments de G ; autrement nous utiliserons par exemple l'expression explicite « w_1 et w_2 sont des mots réduits identiques ».

Soit G un groupe. Une partie N de G est *libre* si le sous-groupe engendré par N est un groupe libre sur N. Deux éléments distincts g et h dans G sont dits *indépendants* si $\{g, h\}$ est une partie libre de G.

L'action d'un groupe (ou d'un monoïde) G sur un ensemble X est dite *libre* si, pour tout x dans X, $x \mapsto gx$ n'a de point fixe que si g est l'élément neutre de G, ou de manière équivalente si chaque fois que $gx = hx$ pour un certain x, alors $g = h$, ou encore si le stabilisateur de tout élément de X est trivial. Plus généralement, une action de G sur X est dite *localement commutative* si le stabilisateur de tout élément de X est abélien.

Proposition 10. *Soit G un groupe agissant librement sur un ensemble X. Si G est paradoxal avec n morceaux, alors X est G-paradoxal avec n morceaux. Si G est dénombrablement paradoxal, alors X est dénombrablement G-paradoxal.*

Preuve. Supposons G paradoxal avec n morceaux (la preuve dans le cas dénombrable est identique). Soit $\{N, M\}$ une partition de G telle que $N \cap M = \varnothing$ et $N \sim_G^r G \sim_G^s M$ avec $r + s = n$. Par l'axiome du choix, il existe un système de représentants des orbites de G sur X ; soit T un tel ensemble. Vu que l'action de G est libre, les ensembles $N(T)$ et $M(T)$ sont disjoints et forment une partition de X. Par hypothèse, N et G admettent des décompositions $\{N_1, \ldots, N_r\}$ et $\{G_1, \ldots, G_r\}$ satisfaisant pour certains g_1, …, g_r dans G les égalités $g_i N_i = G_i$, pour tout i. L'action de G transforme ces égalités en $g_i N_i(T) = G_i(T)$. La liberté de l'action de G implique que $\{N_1(T), \ldots, N_r(T)\}$ et $\{G_1(T), \ldots, G_r(T)\}$ sont des décompositions de $N(T)$ et X respectivement. Nous avons donc montré que $N(T) \sim_G^r X$. Le même raisonnement avec M donne $M(T) \sim_G^s X$. Ainsi, X est G-paradoxal avec n morceaux. $\square$

La proposition 10 permet de trouver des ensembles paradoxaux en faisant agir librement des groupes paradoxaux. Ce résultat présente cependant au moins deux inconvénients. Premièrement, sa preuve est non constructive et ne nous permet pas d'exhiber les morceaux nécessaires à une décomposition paradoxale de l'ensemble. Il est d'ailleurs possible de démontrer que ce n'est pas un théorème de ZF, ce qui anéantit tout espoir d'en obtenir une preuve constructive. [2] Deuxièmement, il est plutôt rare que les actions usuelles de groupes, tels que des groupes d'isométries, soient libres. La proposition suivante nous permet toutefois d'obtenir une action libre à partir d'une action quelconque.

Proposition 11. *Si X est un G-ensemble, le groupe G agit librement sur l'ensemble $X \setminus D$ où D est constitué de tous les éléments de X qui sont fixés par un élément non trivial de G.*

Preuve. Il suffit de constater que D est stable sous l'action de G, et par suite $X \setminus D$ également. □

Nous reviendrons plus en détail sur la classification des groupes paradoxaux dans le chapitre 4. Pour l'instant, nous allons voir qu'une grande classe de groupes paradoxaux est constituée des groupes admettant un sous-groupe libre non abélien.

Proposition 12. *Le groupe F_2 est paradoxal.*

Preuve. Soient a et b des générateurs de F_2. Soit A_+ (resp. A_-, B_+ et B_-) le sous-ensemble de F_2 composé des mots réduits en $a^{\pm 1}$ et $b^{\pm 1}$ commençant (à gauche) par a (resp. a^{-1}, b et b^{-1}). Les ensembles A_+, A_-, B_+ et B_- sont deux à deux disjoints et $A_- \cup A_+ \sim_{F_2} F_2 \sim_{F_2} B_- \cup B_+$, car $F_2 = a^{-1}A_+ \cup A_- = b^{-1}B_+ \cup B_-$ et ces réunions sont disjointes. □

Remarquons que si le G-ensemble X possède un sous-ensemble C qui est H-paradoxal pour un sous-groupe H de G, alors C est également G-paradoxal. De plus, tous sous-groupe d'un groupe G agit librement sur G. En conséquence de la proposition 10, nous obtenons :

Proposition 13. *Tout groupe possédant un sous-groupe paradoxal est paradoxal.*

Vu que tout groupe libre non abélien admet un sous-groupe isomorphe à F_2, *tout groupe possédant un sous-groupe libre non abélien est paradoxal.* Il suffit par exemple de trouver deux éléments indépendants dans un groupe pour pouvoir conclure qu'il est paradoxal. Pour cela, le critère suivant est utile : *pour qu'une partie L d'un groupe G soit libre, il faut et il suffit qu'aucun mot réduit non vide en $L \cup L^{-1}$ ne soit l'élément neutre de G.*

Nous verrons dès le prochain chapitre le résultat surprenant que le groupe des isométries de $\mathbf{R}^d$ contient deux éléments indépendants si $d \geq 3$, et est donc paradoxal.

Proposition 14. *Soient X un G-ensemble, $\kappa \geq 2$ un cardinal et $E = \{g_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ une partie de G indicée injectivement. Supposons qu'il existe x dans X tel que, pour tous mots réduits non triviaux w_1 et w_2 en E qui commencent par des lettres différentes, $w_1x \neq w_2x$. Alors il existe une partie A de X et une famille $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de sous-ensembles de A deux à deux disjoints telles que $g_\alpha^{-1}A_\alpha = A$. En outre, le monoïde engendré par E est un monoïde libre sur E.*

Preuve. Soit M le monoïde engendré par E, A l'orbite de x sous l'action de M, et $A_\alpha = g_\alpha A$. Pour tous mots u et v dans M et tous α et β distincts, $g_\alpha ux \neq g_\beta vx$. Cela implique que les A_α sont deux à deux disjoints, et de plus $g_\alpha^{-1}A_\alpha = A$ pour tout $\alpha < \kappa$. Il reste à montrer que le monoïde engendré par E est un monoïde libre sur E. Soit w un mot réduit non trivial en E. Vu que $\kappa \geq 2$, il existe $\alpha < \kappa$ tel que w ne commence pas par g_α, et alors $wg_\alpha x \neq g_\alpha x$, ce qui implique que w n'est pas l'élément neutre de G. □

Corollaire 15. *Soit X un G-ensemble. Supposons que G possède deux éléments a et b pour lesquels il existe x dans X tel que, pour tous mots u et v en a, a^{-1}, b et b^{-1} commençant respectivement par a et b, $ux \neq vx$. Alors X possède un sous-ensemble G-paradoxal. De plus, le monoïde engendré par a et b est un monoïde libre sur $\{a, b\}$.*

Remarquons toutefois que la preuve de la proposition 14, contrairement à celle de la proposition 10, n'utilise pas l'axiome du choix, et nous en déduirons une construction explicite d'un sous-ensemble paradoxal du plan (voir section 3.2).

2. Plus précisément, en admettant que ZF et l'existence d'un cardinal inaccessible forment une théorie consistante, R. M. Solovay [19] a prouvé que ZF reste consistant après ajout de l'axiome « toutes les parties de $\mathbf{R}$ sont mesurables au sens de Lebesgue ». Certaines conséquences (dans ZF) de la proposition 10 que nous verrons par la suite, en particulier le paradoxe de Banach–Tarski, sont clairement réfutables à partir de cet axiome.

Mentionnons finalement que si les groupes libres semblent fournir la plupart des exemples de groupes paradoxaux, il existe des groupes paradoxaux d'une nature complètement différente. Un groupe est dit *périodique* si tous ses éléments sont d'ordre fini.

***Théorème 16.** *Il existe un groupe paradoxal périodique.*

L'existence d'un tel groupe a été prouvée récemment par A. Yu. Ol'shanskii [15, 16] en utilisant l'axiome du choix.

1.3 Systèmes de congruences

Soient κ et λ des cardinaux non nuls (nous omettrons de le préciser par la suite). On appelle *système de congruences* (de κ équations à λ variables) toute relation binaire à κ éléments sur $\mathscr{P}(\lambda)$. Si S est une telle relation, nous noterons usuellement

$$\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L\} \cong \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R\}$$

un couple (L,R) appartenant à S, que nous appelons une *équation de congruence*. L'*équation complémentaire* de l'équation (L,R) est l'équation $(\lambda \setminus L, \lambda \setminus R)$.

Un système de congruences S à λ variables est *propre* si $(L,R) \in S$ implique que L, $\lambda \setminus L$, R et $\lambda \setminus R$ ne sont pas vides. Il est *faible* si la fermeture transitive de $S \cup S'$ ne contient aucun élément de la forme $(L, \lambda \setminus L)$, où S' est l'ensemble des équations complémentaires des éléments de S.

Soit X un G-ensemble. Étant donné un système de congruences S à λ variables, on dit qu'une famille $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ de parties de X est une *solution* du système S sur X si pour tout (L,R) dans S, $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L\}$ et $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R\}$ sont G-congruents ; si cette G-congruence est réalisée par l'élément g du groupe G, nous dirons que g *résout* l'équation (L,R). Une solution $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ est dite *complète* si les A_β sont deux à deux disjoints et si $\{A_\beta \mid \beta < \lambda\}$ est une partition (non nécessairement stricte) de X. Notons que si X est non vide, S admet au moins deux solutions sur X, à savoir $(X)_{\beta<\lambda}$ et $(\varnothing)_{\beta<\lambda}$. La seconde est l'unique solution de S si X est vide, et alors elle est complète.

Sur un G-ensemble X donné, il est clair que l'ensemble des solutions complètes d'un système de congruences S est identique à l'ensemble des solutions complètes sur X de tout système obtenu à partir de S en remplaçant certaines équations par leurs équations complémentaires.

Soit κ un cardinal. Par une *base* d'un groupe libre F_κ de rang κ nous désignerons une famille injective $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ d'éléments de F_κ telle que $\{g_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ est une partie libre et génératrice de F_κ.

Dans cette section nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 17. *Soit $S = \{(L_\alpha, R_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ un système de congruences propre de κ équations à λ variables (indicé injectivement). Si F_κ agit librement sur un ensemble X, alors pour toute base $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de F_κ le système S admet une solution complète sur X telle que l'équation (L_α, R_α) est résolue par g_α, pour tout $\alpha < \kappa$. De plus, si le système est faible, alors il suffit que l'action de F_κ soit localement commutative pour que de telles solutions existent.*

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 18. *Soient κ un cardinal et F_κ un groupe libre de rang κ avec base $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, agissant sur lui-même par multiplication à gauche. Tout système de congruence propre de κ équations admet une solution complète sur F_κ telle que les équations sont résolues par les g_α.*

Preuve. Considérons un système de congruence propre $\{(L_\alpha, R_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ de κ équations à λ variables. Nous allons décrire une famille recouvrante $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ de sous-ensembles de F_κ deux à deux disjoints en plaçant chaque élément de F_κ dans l'un des A_β, c'est-à-dire en construisant une application $f\colon F_\kappa \to \lambda$. Nous procédons par récurrence sur la longueur des éléments de F_κ comme mots réduits en $\{g_\alpha^{\pm 1} \mid \alpha < \kappa\}$. L'image par f du mot vide est 0. Supposons que nous avons défini la valeur de f pour tous les mots réduits de longueur inférieure ou égale à $n-1$ ($n \geq 1$). Soit x un mot réduit de longueur n dans F_κ, et soient $i \in \{1,-1\}$ et $\alpha < \kappa$ tel que

x commence à gauche par g_α^i. Alors $u = g_\alpha^{-i}x$ est de longueur $n-1$ et par conséquent $f(u)$ a déjà été défini. Considérons la α-ième équation du système : $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\} \cong \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$. Vu que le système est propre, L_α, $\lambda \setminus L_\alpha$, R_α et $\lambda \setminus R_\alpha$ ne sont pas vides. Si $i = 1$, on pose $f(x) = \min R_\alpha$ ou $f(x) = \min \lambda \setminus R_\alpha$ suivant que $f(u)$ appartient à L_α ou non. Si $i = -1$, on pose $f(x) = \min L_\alpha$ ou $f(x) = \min \lambda \setminus L_\alpha$ suivant que $f(u)$ appartient à R_α ou non.

Posons $A_\beta = f^{-1}(\{\beta\})$ pour tout $\beta < \lambda$. En d'autres termes, x appartient à A_β si et seulement si $f(x) = \beta$. Nous avons ainsi construit une famille $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ de sous-ensembles de F_κ deux à deux disjoints, qui recouvre F_κ. Vérifions que cette famille est une solution du système sur F_κ, et que g_α résout la α-ième équation, c'est-à-dire

$$g_\alpha\big(\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}\big) = \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}.$$

Soit x dans $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}$. Si x commence par g_α^{-1} et si $u = g_\alpha x$, alors u s'écrit $u = g_\alpha^{-i}x$ où $i = -1$. Vu que $f(x) \neq \min \lambda \setminus L_\alpha$, u appartient à $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$. Si x ne commence pas par g_α^{-1} (en particulier si x est vide), alors $g_\alpha x$ se trouve dans $A_{\min R_\alpha}$. On vérifie de même que si x' appartient à $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$, alors $g_\alpha^{-1}x'$ est dans $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}$. □

Lemme 19. *Soient κ, λ des cardinaux et F_κ un groupe libre de rang κ avec base $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, agissant sur lui-même par multiplication à gauche. Soit w un élément non trivial de F_κ. Tout système de congruence propre et faible de κ équations à λ variables admet une solution complète $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ sur F_κ telle que les équations sont résolues par les g_α et telle que 1 et w sont dans le même élément de la partition $\{A_\beta \mid \beta < \lambda\}$.*

Preuve. Considérons un système de congruence propre et faible $\{(L_\alpha, R_\alpha) | \alpha < \kappa\}$ de κ équations à λ variables. Nous allons décrire une famille recouvrante $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ de sous-ensembles de F_κ deux à deux disjoints en plaçant chaque élément de F_κ dans l'un des A_β, c'est-à-dire en construisant une application $f\colon F_\kappa \to \lambda$. Pour $\alpha < \kappa$, notons $L(g_\alpha) = L_\alpha$, $R(g_\alpha) = R_\alpha$, $L(g_\alpha^{-1}) = R_\alpha$ et $R(g_\alpha^{-1}) = L_\alpha$. Tout au long de la preuve, nous utiliserons implicitement l'hypothèse que le système est propre, c'est-à-dire que les L_α, R_α et leurs complémentaires sont non vides. Écrivons $w = v_r \cdots v_1$ comme mot réduit en $\{g_\alpha^{\pm 1} | \alpha < \kappa\}$, et posons de plus $v_{r+1} = v_1$. Nous commençons par définir f pour les segments finaux de w : 1, v_1, v_2v_1, …, w. Nous distinguons deux cas.

CAS 1. *Il existe un entier k, $1 \le k \le r$, tel que $R(v_k)$ ou $\lambda \setminus R(v_k)$ a une intersection non vide avec à la fois $L(v_{k+1})$ et $\lambda \setminus L(v_{k+1})$.* Vu que nous obtenons les mêmes solutions complètes en remplaçant l'équation de v_k par son équation complémentaire, nous pouvons supposer sans perte de généralité que c'est $R(v_k)$ qui a une intersection non vide avec à la fois $L(v_{k+1})$ et $\lambda \setminus L(v_{k+1})$. Si $k \neq 1$, posons $f(v_{k-1} \cdots v_1) = \min L(v_k)$. Pour $1 \le i \le k-2$ et $k+1 \le j \le r$, définissons en descendant : $f(v_i \cdots v_1)$ est $\min L(v_{i+1})$ ou $\min \lambda \setminus L(v_{i+1})$ selon que $f(v_{i+1} \ldots v_1)$ appartient à $R(v_{i+1})$ ou non ; $f(v_j \cdots v_1)$ est $\min L(v_{j+1})$ ou $\min \lambda \setminus L(v_{j+1})$ selon que $f(v_{j+1} \cdots v_1)$ appartient à $R(v_{j+1})$ ou non. L'application f a déjà été définie pour tous les segments finaux de w, à l'exception de $v_k \cdots v_1$ et de 1. Si $f(v_{k+1} \cdots v_1) \in R(v_{k+1})$, alors posons $f(v_k \cdots v_1) = \min(R(v_k) \cap L(v_{k+1}))$; sinon $f(v_k \cdots v_1) = \min(R(v_k) \cap \lambda \setminus L(v_{k+1}))$. Finalement, posons $f(1) = f(w)$.

CAS 2. *L'hypothèse du cas 1 n'est pas vérifiée.* La négation de cette hypothèse implique que pour tout k avec $1 \le k \le r$, $R(v_k) = L(v_{k+1})$ ou $R(v_k) = \lambda \setminus L(v_{k+1})$. Pour $2 \le i \le r-1$, définissons successivement $f(1) = \min L(v_1)$; $f(v_1) = \min R(v_1)$; $f(v_i \cdots v_1)$ est $\min R(v_i)$ ou $\min \lambda \setminus R(v_i)$ suivant que $f(v_{i-1} \cdots v_1)$ appartient à $L(v_i)$ ou non ; $f(w) = f(1)$.

Tout élément x de F_κ peut s'écrire de manière unique $x = yt$ où t est un segment final de w de longueur maximale. Nous définissons alors f pour les éléments restants de F_κ de la même façon que dans la preuve de la proposition 18, par récurrence. Soit x un élément quelconque de F_κ et écrivons $x = yt$ comme ci-dessus. Si $y = 1$, alors x est un segment final de w et $f(x)$ a déjà été défini. Supposons que y est de longueur n et commence à gauche par g_α^i, pour certains $\alpha < \kappa$ et $i \in \{1, -1\}$. Alors $u = g_\alpha^{-i}y$ est un mot de longueur $n-1$, et par récurrence $f(ut)$ a déjà été défini. Si $i = 1$, on pose $f(x) = \min R_\alpha$ ou $f(x) = \min \lambda \setminus R_\alpha$ suivant que $f(ut)$ appartient à L_α ou non. Si $i = -1$, on pose $f(x) = \min L_\alpha$ ou $f(x) = \min \lambda \setminus L_\alpha$ suivant que $f(ut)$ appartient à R_α ou non.

Posons $A_\beta = f^{-1}(\{\beta\})$ pour tout $\beta < \lambda$. Nous avons ainsi construit une famille $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ de sous-ensembles de F_κ deux à deux disjoints, qui recouvre F_κ, et 1 et w ont été placés dans le même A_β. Vérifions que cette famille est une solution du système sur F_κ, et que g_α résout la α-ième équation, c'est-à-dire

$$g_\alpha\big(\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}\big) = \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}.$$

Nous ne montrerons que l'inclusion de gauche à droite, l'autre sens étant similaire. Soit donc x tel que $f(x) \in L_\alpha$, et montrons que $f(g_\alpha x) \in R_\alpha$.

Supposons dans un premier temps que x et $g_\alpha x$ sont des segments finaux de w et que l'hypothèse du cas 1 ci-dessus est vérifiée. Il y a différents cas. Supposons que $x = v_{i-1}\cdots v_1$ et que $g_\alpha = v_i$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,r\}$. Si $i = k$, alors $f(g_\alpha x)$ appartient à $R(v_k) \cap L(v_{k+1})$ ou à $R(v_k) \cap \lambda \setminus L(v_{k+1})$, mais dans les deux cas $f(g_\alpha x) \in R(v_k) = R_\alpha$. Si $i \neq k$, alors $f(g_\alpha x) \in R(v_i) = R_\alpha$, car sinon la définition de f impliquerait $f(x) \in \lambda \setminus L(v_i) = \lambda \setminus L_\alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons que $x = v_i \cdots v_1$ et que $g_\alpha = v_i^{-1}$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,r\}$. Si $i = 1$, alors $f(g_\alpha x) = f(1) = f(w) = f(v_r\cdots v_1)$ appartient à $L(v_1) = R_\alpha$ car $f(x)$ appartient à $L_\alpha = R(v_1) = R(v_{r+1})$. Si $i \neq 1$, la définition de f donne que $f(g_\alpha x)$ appartient à $L(v_i) = R_\alpha$ car $f(x)$ appartient à $L_\alpha = R(v_i)$.

Nous supposons maintenant que x et $g_\alpha x$ sont des segments finaux de w et que l'hypothèse du cas 2 est vérifiée. Si $x = v_{i-1}\cdots v_1$ et $g_\alpha = v_i$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,r-1\}$, alors $f(g_\alpha x) \in R(v_i) = R_\alpha$ car $f(x) \in L_\alpha = L(v_i)$. Si $x = v_i\cdots v_1$ et $g_\alpha = v_i^{-1}$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,r-1\}$, alors $f(g_\alpha x) \in L(v_i) = R_\alpha$ car sinon on aurait $f(x) \in \lambda \setminus R(v_i) = \lambda \setminus L_\alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans le cadre de l'hypothèse du cas 2, restent à traiter les possibilités

(a) $x = v_{r-1}\cdots v_1$ et $g_\alpha = v_r$,

(b) $x = w$ et $g_\alpha = v_r^{-1}$.

C'est ici le seul endroit où nous utilisons la définition d'un système faible. Soit $L'(v_i)$ l'élément de $\{L(v_i), \lambda \setminus L(v_i)\}$ auquel $f(v_{i-1}\cdots v_1)$ appartient, qui est soit $R(v_{i-1})$ soit $\lambda \setminus R(v_{i-1})$ par l'hypothèse du cas 2, et soit $R'(v_i)$ l'élément correspondant de $\{R(v_i), \lambda \setminus R(v_i)\}$; remarquons que $L'(v_1) = L(v_1)$ car $f(1) \in L(v_1)$. Notons $\tilde{S}$ la clôture transitive de $S \cup S'$, où S' est l'ensemble des équations complémentaires à celles de S. Nous montrons d'abord que pour tout entier i avec $1 \leq i \leq r$, $(L(v_1), L'(v_i))$ appartient à $\tilde{S}$. Si $i = 2$, alors $L'(v_2) = R(v_1)$ car $f(v_1) \in R(v_1)$, et donc $(L(v_1), L'(v_2))$ appartient à S qui est contenu dans $\tilde{S}$. Supposons par récurrence que $(L(v_1), L'(v_{i-1})) \in \tilde{S}$ pour un certain $i \geq 3$. Vu que $f(v_{i-2}\cdots v_1) \in L'(v_{i-1})$, la définition de f implique que $f(v_{i-1}\cdots v_1)$ appartient à $R'(v_{i-1})$ qui est donc égal à $L'(v_i)$. Or $(L'(v_{i-1}), R'(v_{i-1}))$ appartient à $S \cup S'$, et par transitivité de $\tilde{S}$, $(L(v_1), R'(v_{i-1})) = (L(v_1), L'(v_i))$ appartient à $\tilde{S}$, ce qui prouve l'assertion pour $2 \leq i \leq r$. Pour $i = 1$, on obtient que $(L(v_1), R'(v_r))$ appartient à $\tilde{S}$ (cela découle de ce qui précède pour $r \geq 2$, et du fait que $L(v_1) = L'(v_1)$ pour $r = 1$), et la faiblesse du système et l'hypothèse du cas 2 impliquent $(L(v_1), L(v_1)) \in \tilde{S}$. Nous pouvons alors traiter les deux cas restants :

(a) L'hypothèse est $f(v_{r-1}\cdots v_1) \in L_\alpha = L(v_r)$, ce qui signifie que $L'(v_r) = L(v_r)$ et par l'assertion que nous venons de démontrer, cela implique $(L(v_1), L(v_r)) \in \tilde{S}$. Par transitivité, $(L(v_1), R(v_r)) \in \tilde{S}$. Par l'hypothèse du cas 2, $R(v_r)$ est soit $L(v_1)$ soit $\lambda \setminus L(v_1)$, mais le second cas est impossible car il implique $(L(v_1), \lambda \setminus L(v_1)) \in \tilde{S}$ ce qui contredit la faiblesse de S. Ainsi, $R(v_r) = L(v_1)$ et finalement $f(g_\alpha x) = f(w) = f(1) \in L(v_1) = R(v_r) = R_\alpha$.

(b) L'hypothèse $f(x) \in L_\alpha$ se traduit ici par $f(w) \in R(v_r)$. Or, $f(w) = f(1) \in L(v_1)$, et donc $R(v_r) = L(v_1)$ par l'hypothèse du cas 2. Par l'assertion ci-dessus, $(L(v_1), L'(v_r)) \in \tilde{S}$, et par transitivité $(L(v_1), R'(v_r)) \in \tilde{S}$. Puisque S est faible $R'(v_r) = L(v_1) = R(v_r)$, et par suite $L'(v_r) = L(v_r)$. Finalement, $f(g_\alpha x) = f(v_{r-1}\cdots v_1) \in L'(v_r) = L(v_r) = R_\alpha$.

Il reste à considérer le cas où l'un parmi x et $g_\alpha x$ n'est pas un segment final de w. Nous pouvons ici procéder exactement de la même façon que dans le dernier paragraphe de la preuve du lemme 18.

Après examen de tous les cas possibles, on a donc $g_\alpha(\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}) \subseteq \bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$, et l'égalité est obtenue en répétant les mêmes arguments avec g_α^{-1} au lieu de g_α, L_α au lieu de R_α et R_α au lieu de L_α. Ceci achève de démontrer que $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ est une solution complète du système avec les propriétés voulues. $\square$

Le lemme suivant justifiera l'intérêt que l'on porte aux actions localement commutatives.

Lemme 20. *Soient κ un cardinal, X un F_κ-ensemble, $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ une base de F_κ et x un élément de X. Supposons que l'action de F_κ sur X est localement commutative. Si w est un élément non trivial du stabilisateur de x de longueur minimale comme mot réduit en $\{g_\alpha^{\pm 1} \mid \alpha < \kappa\}$, alors le stabilisateur de x est le sous-groupe de F_κ engendré par w.*

Preuve. Soit v un élément du stabilisateur de x. La commutativité locale implique la relation $vwv^{-1}w^{-1} = 1$, qui doit être une relation triviale car un groupe libre n'admet aucune relation non triviale. Par conséquent v et w sont tous deux dans un sous-groupe cyclique de F_κ. Soit u un générateur de ce sous-groupe, de sorte que $v = u^k$ et $w = u^l$. Mais comme w est de longueur minimale dans le stabilisateur de x, $|k| > |l|$. En faisant la division euclidienne de k par l dans $\mathbf{Z}$, nous pouvons écrire $k = ql + r$ avec $q \in \mathbf{Z}$ et $0 \le r < |l|$. Ainsi $x = vx = u^k x = u^r(u^l)^q x = u^r x$, et la minimalité de w force $r = 0$. Par conséquent, l divise k et v est une puissance de w. □

Preuve du théorème 17. Nous supposons pour l'instant uniquement que le système considéré est propre. Fixons une base $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de F_κ. Soit X/F_κ l'ensemble des orbites de l'action de F_κ sur X. Supposons que pour toute orbite O il existe une solution complète $(O_\beta)_{\beta<\lambda}$ sur O du système donné telle que l'équation (L_α, R_α) est résolue par g_α. La famille $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ définie par $A_\beta = \bigcup\{O_\beta \mid O \in X/F_\kappa\}$ est alors évidemment une solution complète du système sur X avec la même propriété. Nous pouvons ainsi supposer sans perte de généralité que l'action de F_κ sur X est transitive. Les stabilisateurs des éléments de X sont alors tous triviaux ou tous non triviaux, car si h fixe x alors ghg^{-1} fixe gx, pour tous g et h dans F_κ. Nous distinguons les deux possibilités.

CAS 1. *Le stabilisateur de tout élément de X est trivial.* Fixons un élément x dans X. Tout élément y de X s'écrit de manière unique $y = \hat{y}x$ pour un certain $\hat{y}$ dans F_κ. Par le lemme 18, le système admet une solution complète $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ sur F_κ telle que l'équation (L_α, R_α) est résolue par g_α. Pour $\beta < \lambda$, posons alors $A^*_\beta = \{y \in X \mid \hat{y} \in A_\beta\}$. Alors $(A^*_\beta)_{\beta<\lambda}$ est une famille de sous-ensembles de X deux à deux disjoints recouvrant X, et c'est une solution du système sur X avec les propriétés souhaitées. En effet, si $z \in \bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}$, alors $\widehat{g_\alpha z} = g_\alpha\hat{z}$ appartient à $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$, et par suite $g_\alpha z$ appartient à $\bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$; l'inclusion inverse se vérifie de la même manière.

Si l'action de F_κ est libre, alors l'hypothèse du cas 1 est toujours vérifiée. Nous avons donc déjà démontré la première partie du théorème. Pour le reste de la démonstration, nous supposons donc que X est non vide et que le système $\{(L_\alpha, R_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ est faible.

CAS 2. *Le stabilisateur de tout élément de X est non trivial.* Soit W l'ensemble des éléments non triviaux de F_κ fixant au moins un élément de X ; c'est un ensemble non vide. Soient w un mot réduit en $\{g_\alpha^{\pm 1} \mid \alpha < \kappa\}$ de longueur minimale dans W, x un point de X fixé par w et h la première lettre de w. Remarquons que le mot w ne se termine pas par h^{-1} car $h^{-1}wh$ fixe $h^{-1}x$, et par minimalité de w dans W le mot $h^{-1}wh$ ne peut être plus court que w. Nous allons montrer comment un élément y de X peut s'écrire de manière unique $y = \hat{y}x$ où $\hat{y}$ est un élément de F_κ qui n'admet ni w ni h^{-1} comme segment final. Soit v un mot réduit de longueur minimale tel que $y = vx$. Le mot v ne se termine pas par w, car sinon le mot vw^{-1} vérifierait aussi $y = vw^{-1}x$ tout en étant plus court que v. Pour la même raison, v ne se termine pas par w^{-1}, et ainsi vw ne se termine pas par h^{-1}. Si v se termine par h^{-1}, nous posons donc $\hat{y} = vw$ (qui ne se termine pas par w car w commence par h) ; sinon, posons $\hat{y} = v$. Dans les deux cas, $\hat{y}$ ne se termine ni par w ni par h^{-1}. Il reste à montrer qu'un tel $\hat{y}$ est unique. Nous utilisons le lemme 20. Si $\tilde{y}$ est un mot ayant les mêmes propriétés que $\hat{y}$, alors $\tilde{y}^{-1}\hat{y}$ et $\hat{y}^{-1}\tilde{y}$ fixent x et donc appartiennent au groupe engendré par w. Vu que $\tilde{y}^{-1}$ et $\hat{y}^{-1}$ ne commencent pas par h et que $\hat{y}$ et $\tilde{y}$ ne se terminent par par w, on en déduit que $\tilde{y}^{-1}\hat{y} = \hat{y}^{-1}\tilde{y} = 1$, c'est-à-dire $\tilde{y} = \hat{y}$. Par le lemme 19, le système admet une solution complète $(A_\beta)_{\beta<\lambda}$ sur F_κ telle que l'équation (L_α, R_α) est résolue par g_α, et satisfaisant la condition supplémentaire que 1 et w sont dans le même élément de la partition $\{A_\beta \mid \beta < \lambda\}$. Nous définissons alors, pour tout $\beta < \lambda$, $A^*_\beta = \{y \in X \mid \hat{y} \in A_\beta\}$. Nous vérifions maintenant que $(A^*_\beta)_{\beta<\lambda}$ est une solution du système sur X avec les propriétés souhaitées, à savoir

$$g_\alpha\Big(\bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}\Big) = \bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in R_\alpha\},$$

pour tout $\alpha < \kappa$. Nous ne montrerons que l'inclusion de gauche à droite, l'autre sens étant similaire. Soit z dans $\bigcup\{A^*_\beta \,|\, \beta \in L_\alpha\}$. Si $g_\alpha \hat{z}$ ne se termine ni par w ni par h^{-1}, alors par unicité $\widehat{g_\alpha z}$ et égal à $g_\alpha \hat{z}$ qui appartient à $\bigcup\{A_\beta \,|\, \beta \in R_\alpha\}$, et par suite $g_\alpha z$ appartient à $\bigcup\{A^*_\beta \,|\, \beta \in R_\alpha\}$. Il reste deux cas à traiter.

(a) Supposons que $g_\alpha \hat{z}$ se termine par w. Étant donné que $\hat{z}$ ne se termine pas par w, $g_\alpha \hat{z}$ doit être égal à w, de sorte que $g_\alpha z = g_\alpha \hat{z} x = wx = x$. Mais $g_\alpha \hat{z} = w$ appartient à l'ensemble $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$, et donc 1 lui appartient également. Vu que $\widehat{g_\alpha z} = \hat{x} = 1$, il s'ensuit que $g_\alpha z$ appartient à $\bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$.

(b) Supposons que $g_\alpha \hat{z}$ se termine par h^{-1}. Étant donné que $\hat{z}$ ne se termine pas par h^{-1}, $\hat{z}$ doit être égal à 1, de sorte que $z = x$. Ceci implique que $g_\alpha = h^{-1}$ et donc que w commence par g_α^{-1}. Mais $\hat{z} = 1$ appartient à l'ensemble $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in L_\alpha\}$, et donc w lui appartient également. Ainsi, $g_\alpha w$ appartient à $\bigcup\{A_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$. D'autre part, $g_\alpha w = \widehat{g_\alpha x}$, car $g_\alpha wx = g_\alpha x$ et $g_\alpha w$ ne se termine ni par w ni par h^{-1}, et donc $g_\alpha z = g_\alpha x$ appartient à $\bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$.

Dans tous les cas, $g_\alpha z$ appartient à $\bigcup\{A^*_\beta \mid \beta \in R_\alpha\}$, ce qui conclut le traitement du cas 2 ainsi que la démonstration. □

Remarquons que la preuve du théorème 17, contrairement à celles des lemmes 18 et 19, utilise l'axiome du choix. En effet, à la fois dans le traitement des cas 1 et 2 nous avons dû fixer un élément x de X dans chaque orbite. Ceci est inévitable, car ce théorème implique dans ZF la proposition 10, qui n'est pas un théorème de ZF (voir toutefois la note au bas de la page 7).

Si l'action de F_2 sur un ensemble non vide X est localement commutative, alors par le théorème 17 X est F_2-paradoxal avec quatre morceaux. Soient en effet g et h des générateurs de F_2. Le système de congruences donné par les deux équations $A_1 \cong A_1 \cup A_2 \cup A_3$ et $A_3 \cong A_0 \cup A_1 \cup A_3$ est un système propre et faible. Par le théorème 17, X admet une partition $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ vérifiant $A_0 \cup gA_1 = X = A_2 \cup hA_3$. Ainsi, les A_i sont non vides et $A_0 \cup A_1 \sim^2_{F_2} X \sim^2_{F_2} A_2 \cup A_3$.

Remarquons plus généralement que si $\kappa \geq 2$ est un cardinal et si $(A_\alpha)_{\alpha<2\kappa}$ est une solution complète sur un G-ensemble X non vide du système de congruences à 2κ variables formé des κ équations

$$A_{\sigma(\alpha)} \cong \bigcup \{A_\beta \mid \beta < 2\kappa \text{ et } \beta \neq \tau(\alpha)\}, \tag{1}$$

où σ et τ sont deux injections de κ dans 2κ telles que $\{\sigma(\kappa), \tau(\kappa)\}$ est une décomposition de 2κ, alors $A_{\sigma(\alpha)} \cup A_{\tau(\alpha)} \sim_G \bigcup\{A_\beta \mid \beta < 2\kappa \text{ et } \beta \neq \tau(\alpha)\} \cup A_{\tau(\alpha)} = X$. En d'autre termes, si ce système admet une solution complète sur X, alors X est partitionnable en κ parties, chacune G-équidécomposable avec deux morceaux à X tout entier (ces parties sont nécessairement non vides si X est non vide). En outre, ce système étant propre et faible, il suffit que F_κ agisse localement commutativement sur un ensemble pour que cet ensemble résolve complètement le système. Pour résumer :

Proposition 21. *Soit κ un cardinal supérieur ou égal à 2. Si F_κ agit localement commutativement sur un ensemble non vide X, alors il existe une partition de X de cardinalité κ dont chaque élément est F_κ-équidécomposable avec deux morceaux à X tout entier.*

Ceci donne en particulier une preuve non directe de l'impossibilité d'une action localement commutative de F_κ sur un ensemble non vide de cardinalité strictement inférieure à 2κ.

Soient X un G-ensemble et λ un cardinal supérieur ou égal à 2. On dit que X est *G-divisible* par λ s'il existe une partition de X de cardinal λ dont les éléments sont G-équidécomposables deux à deux. En d'autres termes, X est G-divisible par λ si le système de congruences formé des $\lambda - 1$ équations $A_0 \cong A_\beta$, pour $1 \leq \beta < \lambda$, admet une solution complète sur X. Si $\lambda = 2$, l'unique équation $A_0 \cong A_1$ implique que ce système de congruences n'est pas faible. Cependant, si $\lambda \geq 3$, il est facile de vérifier que le système est faible. Ainsi, par le théorème 17 :

Proposition 22. *Soit $\lambda \geq 3$ (resp. $\lambda \geq 2$) un cardinal. Si $F_{\lambda-1}$ agit localement commutativement (resp. librement) sur un ensemble X, alors X est G-divisible par λ.*

1.4 Congruence par dissection

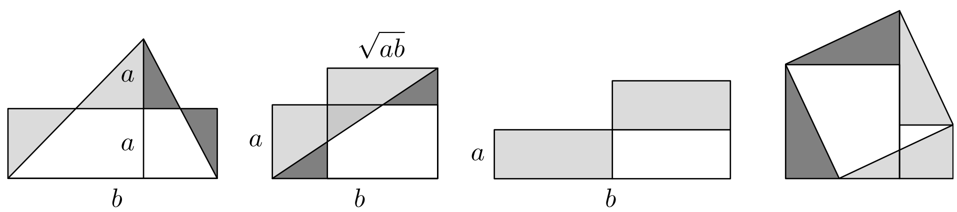
Dans cette section nous allons brièvement étudier la notion usuelle de congruence par dissection de polygones dans $\mathbf{R}^2$, et montrer que cette notion implique celle de l'équidécomposabilité de polygones. La réciproque sera démontrée dans la section 4.5. Notons λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^2$. Les termes *segment*, *polygone*, *triangle* et *carré* dénotent des parties convexes et fermées du plan.

Soit P un polygone. Un ensemble fini $\mathscr{P}$ de polygones est une *décomposition polygonale* de P si la réunion de $\mathscr{P}$ est P et si les intérieurs des éléments de $\mathscr{P}$ sont deux à deux disjoints. Si une décomposition polygonale à n éléments $\{P_1, \dots, P_n\}$ de P est donnée, alors on peut obtenir une décomposition $\{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n\}$ de P avec les propriétés suivantes : $\tilde{P}_i \cup \partial P_i = P_i$ et $\tilde{P}_i$ est Lebesgue-mesurable, pour tout i. Il suffit par exemple de poser $\tilde{P}_1 = P_1$ puis $\tilde{P}_i = P_i \setminus \bigcup\{P_j \mid 1 \leq j < i\}$ pour $2 \leq i \leq n$.

Deux polygones P et Q sont dits *congruents par dissection* s'il existe des décompositions polygonales $\{P_1, \dots, P_n\}$ et $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ de P et Q telles que P_i et Q_i sont congruents, pour tout i. On vérifie comme dans la proposition 1 que la congruence par dissection définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des polygones.

Théorème 23 (Théorème de Bolyai–Gerwien). *Deux polygones sont congruents par dissection si et seulement s'ils ont la même aire.*

Preuve. Soit $\{P_1, \dots, P_n\}$ une décomposition polygonale à n éléments d'un polygone P. Il existe une décomposition $\{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n\}$ de P en éléments Lebesgue-mesurables telle que $\tilde{P}_i \cup \partial P_i = P_i$ pour tout i. La mesure de Lebesgue de P_i est égale par additivité à la somme des mesures de $\tilde{P}_i$ et de $\partial P_i \setminus \tilde{P}_i$, soit $\lambda(P_i) = \lambda(\tilde{P}_i)$ car ∂P_i est une réunion finie de segments. À nouveau par additivité, on obtient que $\sum_{i=1}^n \lambda(P_i) = \lambda(P)$. Vu que les isométries préservent la mesure de Lebesgue, on en déduit que si P et Q sont congruents par dissection, alors $\lambda(P) = \lambda(Q)$.



(a) (b) (c) (d)

Figure 1 – Congruences par dissection

Pour montrer la réciproque, il est suffisant, par transitivité de la congruence par dissection, de vérifier que tout polygone est congruent par dissection à un carré (alors nécessairement de même aire). Nous allons vérifier ce fait à l'aide de figures. Tout triangle est congruent par dissection à un rectangle, comme le montre la figure 1 (a). D'autre part, tout rectangle est congruent par dissection à un carré : si a et b sont les longueurs des côtés d'un rectangle avec $b \leq 4a$, alors la figure 1 (b) montre comment transformer ce rectangle en un carré ; les autres rectangles peuvent toujours être ramenés à des rectangles adéquats (figure 1 (c)). Or, deux carrés peuvent être tranformés en un seul à l'aide du théorème de Pythagore, ce que montre la figure 1 (d). Vu que tout polygone admet une décomposition polygonale composée de triangles, des applications successives de ces procédés montrent que tout polygone est congruent par dissection à un carré. □

L'étude de la congruence par dissection des polygones précède de longue date celle, plus générale, de l'équidécomposabilité. Cependant, la première notion n'est pas *a priori* un cas particulier de la seconde. Nous allons maintenant démontrer qu'en fait si deux polygones sont congruents par dissection alors ils sont équidécomposables. La réciproque est également vraie, car nous verrons au chapitre 4 que deux polygones équidécomposables on nécessairement la même aire.

Lemme 24. *Soient A une partie de $\mathbf{R}^2$ d'intérieur non vide et T est une réunion finie de segments. Si A et T sont disjoints, alors $A \sim A \cup T$.*

Preuve. Soit $B = B(a, r)$ une boule contenue dans A. L'ensemble T peut s'écrire $\bigcup \mathscr{T}$ où $\mathscr{T}$ est un ensemble fini de segments de longueurs strictement inférieures à r. Soit R un rayon de B auquel on a enlevé le point a. Notons ρ la rotation de 1 radian autour du point a et posons $U = \bigcup\{\rho^n(R) \mid n \in \mathbf{N}\}$. Soient S un élément de $\mathscr{T}$ et σ un déplacement envoyant S dans R. Puisqu'aucun multiple de 2π n'est entier, il est clair que $\rho(U) = U \setminus R$, et nous obtenons $B \precsim B \cup S = (B \setminus U) \cup U \cup S \sim (B \setminus U) \cup (U \setminus R) \cup \sigma(S) \precsim B$, et donc $B \sim B \cup S$ par le théorème de Banach–Schröder–Bernstein. En appliquant le même raisonnement autant de fois qu'il y a de segments dans $\mathscr{T}$, nous obtenons $B \sim B \cup T$, d'où $A = (A \setminus B) \cup B \sim (A \setminus B) \cup (B \cup T) = A \cup T$. □

Lemme 25. *Si $\{P_1, \ldots, P_n\}$ est une décomposition polygonale d'un polygone P, alors P et $P' = \bigcup\{\mathring{P}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ sont équidécomposables.*

Preuve. C'est un corollaire du lemme 24, en posant $A = P'$ et $T = P \setminus P'$. □

Théorème 26. *Deux polygones de même aire sont équidécomposables.*

Preuve. Soient P et Q deux polygones de même aire. Par le théorème de Bolyai–Gerwien, il existe des décompositions polygonales $\{P_1, \ldots, P_n\}$ et $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ de P et Q telles que P_i et Q_i sont congruents, pour tout i. Les isométries étant en particulier des homéomorphismes, $\mathring{P}_i$ et $\mathring{Q}_i$ sont congruents pour tout i. Ainsi, si P' (respectivement Q') est la réunion (disjointe) des intérieurs des P_i (respectivement des Q_i), alors $P' \sim Q'$. Par le lemme 25, nous obtenons $P \sim P' \sim Q' \sim Q$. □

M. Laczkovich [10] a prouvé le résultat beaucoup plus fort que deux polygones de même aire sont équidécomposables *par translations uniquement* (c'est-à-dire $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposables), et plus généralement même que deux domaines de Jordan suffisamment réguliers de même aire sont $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposables (voir la section 3.4).

Nous verrons dans la section 4.5 que si deux parties Lebesgue-mesurables de $\mathbf{R}^2$ sont équidécomposables, alors elles ont la même aire. La réciproque du théorème 26 est donc également vraie.

1.5 Le monoïde des types d'équidécomposabilité

Dans cette section, nous fixons un groupe G et un G-ensemble X. On définit naturellement l'action du groupe produit $G^* = G \times \mathrm{Sym}(\mathbf{N})$ sur $X^\circ = X \times \mathbf{N}$ comme suit : $(g, \sigma)(x, n) = (gx, \sigma(n))$ pour tout g dans G et toute permutation σ de $\mathbf{N}$.

Soit K une partie de X°. Un entier naturel n est un *niveau* de K s'il existe x dans X tel que (x, n) appartient à K. La partie K est dite *bornée* si elle n'admet qu'un nombre fini de niveaux, ou de manière équivalente si sa projection sur $\mathbf{N}$ est bornée. Pour une partie bornée K et un entier naturel n, on définit $K + n = \{(x, m + n) \mid (x, m) \in K\}$.

Soit $\mathscr{T}_0(G, X)$ le quotient de l'ensemble des parties bornées de X° par la relation $\mathscr{E}_{G^*}$ restreinte à cet ensemble. La classe d'équivalence dans $\mathscr{T}_0(G, X)$ d'une partie bornée K de X°, notée $[K]$, s'appelle le *type d'équidécomposabilité* de K. Remarquons que $[K] = [K + n]$ pour toute partie bornée K de X° et tout entier naturel n.

Pour $[K]$ et $[L]$ dans $\mathscr{T}_0(G, X)$, on définit $[K] + [L] = [K \cup (L + n)]$ où n est choisi assez grand pour que K soit disjoint de $L + n$ (par exemple, on peut prendre pour $n - 1$ le plus grand entier apparaissant dans un couple de K). Cette définition est légitime. En effet, si $K \sim_{G^*} K'$ et $L \sim_{G^*} L'$, vu que $[L + n] = [L' + n']$ pour tous entiers naturels n et n', la propriété 2 du théorème 4 implique que $K \cup (L + n) \sim_{G^*} K' \cup (L' + n')$ si n et n' sont assez grands.

Proposition 27. *Soit X un G-ensemble. L'ensemble $\mathscr{T}_0(G, X)$ muni de l'opération + définie dans le paragraphe précédent est un monoïde commutatif.*

Preuve. Le type $[\varnothing]$ est un élément neutre pour +. L'associativité est une conséquence de la propriété 2 du théorème 4. Explicitement, si J, K et L sont des parties bornées de X°, alors $J \cup ((K \cup (L + m')) + m) = J \cup (K + m) \cup (L + m + m') \sim_{G^*} J \cup (K + n) \cup (L + n')$ (où n,

n', m et m' sont choisis de sorte que toutes les unions souhaitées soient disjointes), c'est-à-dire $[J] + ([K] + [L]) = ([J] + [K]) + [L]$. La commutativité se déduit de manière analogue de la propriété 2 du théorème 4 et de la commutativité de la réunion. □

Comme pour tout monoïde, il existe une relation de préordre sur $\mathscr{T}_0(G,X)$ pour laquelle $[K] \leq [L]$ si et seulement s'il existe $[J]$ tel que $[K] + [J] = [L]$. Cette relation vérifie, pour tous $[K]$, $[L]$ et $[J]$ dans $\mathscr{T}_0(G,X)$ et tous entiers naturels n et m, les propriétés suivantes : si $[K] \leq [L]$ alors $n[K] \leq n[L]$; si $[K] \leq [L]$ alors $[K] + [J] \leq [L] + [J]$; si $n \leq m$ alors $n[K] \leq m[K]$.

Proposition 28. *Soient K et L des partie bornées du G^*-ensemble X°. Alors $[K] \leq [L]$ si et seulement si K est G^*-subdécomposable à L. En particulier, la relation $\leq$ est un ordre sur $\mathscr{T}_0(G,X)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $[J]$ dans $\mathscr{T}_0(G,X)$ tel que $[K]+[J] = [L]$. Cela signifie qu'il existe une G^*-congruence par morceaux de $K \cup (J+n)$ vers L, pour n assez grand. La restriction de cette application à K est alors une G^*-congruence par morceaux de K vers une partie de L, et donc K est G^*-subdécomposable à L. Réciproquement, s'il existe une G^*-congruence par morceaux de K vers une partie L' de L, alors pour m assez grand $K \cup ((L \setminus L') + m)$ est G^*-équidécomposable à L, ou en d'autres termes $[K] + [L \setminus L'] = [L]$, ce qui implique $[K] \leq [L]$. La deuxième assertion est alors équivalente au théorème de Banach–Schröder–Bernstein. □

Convention. Si C est une partie d'un G-ensemble X, nous écrirons dorénavant $[C]$ à la place de $[C \times \{0\}]$.

Le monoïde des types d'équidécomposabilité nous permet de reformuler de façon très intuitive les concepts principaux de la section 1.1.

Proposition 29. *Soit X un G-ensemble et soient A, B et C des parties de X. Les assertions suivantes sont satisfaites.*

1. *A et B sont G-équidécomposables si et seulement si $[A] = [B]$.*
2. *A est G-subdécomposable à B si et seulement si $[A] \leq [B]$.*
3. *C est G-paradoxal si et seulement si $[C] = 2[C]$.*
4. *$[A] + [B] = [A \cup B] + [A \cap B]$.*

Preuve. 1. Il suffit de constater que $A \sim_G B$ si et seulement si $A \times \{0\} \sim_{G^*} B \times \{0\}$.

2. Cela découle de la proposition 28 et du point 1.

3. Rappelons que C est G-paradoxal si et seulement s'il existe une décomposition $\{A, B\}$ de C à deux éléments telle que $A \sim_G C \sim_G B$. Si $\{A, B\}$ est une telle décomposition de C, alors $A \times \{0\} \sim_{G^*} C \times \{0\}$ et $C \times \{1\} \sim_{G^*} B \times \{0\}$, d'où $C \times \{0\} \sim_{G^*} (C \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$, c'est-à-dire $[C] = 2[C]$. Réciproquement, si $[C] = 2[C]$, il existe une G^*-congruence par morceaux f de $C \times \{0\}$ vers $(C \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$. Si $A \times \{0\}$ (resp. $B \times \{0\}$) est la préimage de $C \times \{0\}$ (resp. $C \times \{1\}$) par f, alors $\{A, B\}$ est une décomposition de C telle que $A \times \{0\} \sim_{G^*} C \times \{0\} \sim_{G^*} B \times \{0\}$, ce qui par le point 1 est équivalent à $A \sim_G C \sim_G B$.

4. Notons $K = A \times \{0\}$ et $L = B \times \{0\}$. La relation $(L+1) \sim_{G^*} (L \setminus K) \cup ((K \cap L) + 1)$ implique $K \cup (L+1) \sim_{G^*} K \cup (L \setminus K) \cup ((K \cap L) + 1) = (K \cup L) \cup ((K \cap L) + 1)$, d'où la formule. □

Il faut noter que la construction ci-dessus peut naturellement se généraliser. Par exemple, pour étudier l'équidécomposabilité dénombrable, on peut définir des types d'équidécomposabilité adéquats en posant $G^* = G \times \mathrm{Sym}(\aleph_1)$ et $X^\circ = X \times \aleph_1$. Une partie bornée de X° est alors une partie avec un nombre dénombrable de niveaux. On obtient ainsi un monoïde commutatif $\mathscr{T}_1(G,X)$ qui jouit essentiellement des mêmes propriétés que $\mathscr{T}_0(G,X)$, en particulier qui vérifie le théorème 30 ci-dessous. Nous nous limitons ici à l'étude de $\mathscr{T}_0(G,X)$.

Le résultat prinicipal sur le monoïde des types d'équidécomposabilité est le suivant :

Théorème 30. *Soit X un G-ensemble et soient $[K]$ et $[L]$ des éléments de $\mathscr{T}_0(G,X)$. S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $n[K] = n[L]$, alors $[K] = [L]$.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques notions de théorie des graphes. Nous appellerons *graphe* un triple $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ où ι est une application de E dans l'ensemble des parties à exactement deux éléments de V. Les éléments de V s'appellent les *sommets* de $\mathscr{G}$ et les éléments de E sont les *arêtes* de $\mathscr{G}$. L'application ι s'appelle l'*application d'incidence* de $\mathscr{G}$. Si e est une arête, les éléments de $\iota(e)$ sont les *extrémités* de e. Deux sommets distincts v et w sont *adjacents* s'il existe une arête e telle que $\{v, w\} \subseteq \iota(e)$. Si U est une partie de V, on note $\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(U)$ l'ensemble des sommets de $\mathscr{G}$ qui sont adjacent à un élément de U. Le *degré* d'un sommet v est la cardinalité de l'ensemble $\{e \in E \mid v \in \iota(e)\}$. Si V' est une partie de V, alors la *restriction* de $\mathscr{G}$ à V', notée $\mathscr{G}|V'$ est le graphe $(V', E', \iota \restriction E')$ où $E' = \{e \in E \mid \iota(e) \subseteq V'\}$. Une partie V' de V est *libre* dans $\mathscr{G}$ si aucune partie à deux éléments de V' n'est dans l'image de ι. On dit qu'une partie E' de E *recouvre* une partie V' de V si $\iota(E')$ recouvre V'. Un *couplage* sur $\mathscr{G}$ est une partie C de E telle que tout sommet de $\mathscr{G}$ est l'extrémité d'au plus une arête dans C. Une *factorisation* de $\mathscr{G}$ est un couplage recouvrant V ; le graphe $\mathscr{G}$ est *factorisable* s'il existe une factorisation de $\mathscr{G}$.

Soient $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe, v et w des sommets de G et n un entier naturel. Un *chemin* (de longueur n) dans $\mathscr{G}$ entre v et w est une application $c\colon \{0, \dots, n\} \to V$ telle que $c(0) = v$, $c(n) = w$ et $\{c(k-1), c(k)\}$ appartient à l'image de ι pour $1 \leq k \leq n$. Il est facile de vérifier que l'existence d'un chemin entre deux sommets définit une relation d'équivalence sur V. Une *composante connexe* de $\mathscr{G}$ est un élément du quotient de V par cette relation.

Lemme 31. *Soit $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe et $\mathscr{V}$ une partition de V. Pour chaque U dans $\mathscr{V}$, supposons que $F(U)$ est un factorisation de $\mathscr{G}|U$. Alors $F = \bigcup\{F(U) \mid U \in \mathscr{V}\}$ est une factorisation de $\mathscr{G}$.*

Preuve. Un sommet v de $\mathscr{G}$ appartient à un unique élément U de $\mathscr{V}$. Il existe alors une arête e dans $F(U)$, donc dans F, telle que $v \in \iota(e)$. Si $e' \in F$ est tel que $v \in \iota(e')$, alors e' est une arête de $\mathscr{G}|U$. Ainsi, e' appartient à $F(U)$ et donc $e = e'$. □

Soient $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe et α un cardinal. Le graphe $\mathscr{G}$ est dit : *α-régulier* si tous ses sommets ont degré α ; *biparti* s'il existe une partition $\{A, B\}$ de l'ensemble des sommets telle que A et B sont des parties libres de V ; *localement fini* si le degré de tout sommet de $\mathscr{G}$ est fini. Une partie W de V est dite *équilibrée* dans $\mathscr{G}$ si pour tout entier naturel n et toute partie V' de W de cardinalité n qui est libre dans $\mathscr{G}$, $\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(V')$ est de cardinalité au moins n. Le graphe $\mathscr{G}$ est *équilibré* si V est équilibré dans $\mathscr{G}$.

Notons que toute restriction d'un graphe biparti est un graphe biparti.

Lemme 32. *Soient $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe biparti et $\{A, B\}$ une décomposition de V en parties libres. Une partie W de V est équilibrée dans $\mathscr{G}$ si et seulement si $A \cap W$ et $B \cap W$ sont équilibrés dans $\mathscr{G}$.*

Preuve. La nécessité est évidente. Supposons que $A \cap W$ et $B \cap W$ sont des parties équilibrées dans $\mathscr{G}$, et soit U une partie de W à n éléments. Notons p le cardinal de $U \cap A$ et q celui de $U \cap B$, de sorte que $p + q = n$. Alors les sommets dans $U \cap A$ sont adjacents à au moins p sommets de $\mathscr{G}$, qui appartiennent à B car A est libre, et de même les sommets dans $U \cap B$ sont adjacents à au moins q sommets de $\mathscr{G}$, qui appartiennent à A. Ainsi, les sommets de U sont adjacents à au moins $p + q = n$ sommets distincts. □

Lemme 33. *Soient $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe biparti avec V fini et $\{A, B\}$ une partition de V en parties libres avec $\mathrm{Card}(A) \geq \mathrm{Card}(B)$. Si A est équilibré dans $\mathscr{G}$, alors $\mathscr{G}$ est factorisable.*

Preuve. Nous pouvons évidemment supposer que V est non vide. D'une part, $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(A)) \geq \mathrm{Card}(A)$ car A est équilibré, et d'autre part $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(A)) \leq \mathrm{Card}(B)$ car $\mathscr{G}$ est biparti, d'où $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$. Nous allons montrer que pour tout entier m avec $1 \leq m \leq \mathrm{Card}(A)$ il existe un couplage sur $\mathscr{G}$ à m éléments. Nous obtiendrons une factorisation de $\mathscr{G}$ en prenant $m = \mathrm{Card}(A)$. Nous procédons par récurrence. Le graphe $\mathscr{G}$ possède au moins une arête, car $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(\{v\})) \geq 1$ pour tout sommet v de $\mathscr{G}$, et par conséquent il existe un couplage sur $\mathscr{G}$ à un élément. Supposons qu'il existe un couplage C sur $\mathscr{G}$ à m éléments pour un certain $m < \mathrm{Card}(A)$. Soit a_0 un élément de A qui n'est l'extrémité d'aucune arête de C. Vu que $\mathscr{G}$ est équilibré, il existe un sommet b_1 adjacent à a_0. Si b_1 est l'extrémité d'une arête de C, soit a_1 l'autre extrémité d'une telle arête. Nous répétons alors ce procédé à partir de a_1 comme suit : puisque $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(\{a_0, a_1\})) \geq 2$, il existe un sommet b_2 distinct de b_1 et adjacent à a_0 ou à a_1. Si b_2 est l'extrémité d'une arête de C, soit a_2 l'autre extrémité de cette arête, qui est distincte de a_0 et a_1. Nous continuons ce processus tant que b_i est l'extrémité d'une arête de C. Vu que V est fini et que l'ensemble des sommets a_i croît à chaque étape, il existe un entier $k \leq \mathrm{Card}(A)$ tel que b_k n'est l'extrémité d'aucune arête de C. Par construction, il existe une arête e_1 dans $E \setminus C$ et un indice i_1, $0 \leq i_1 < k$, tels que $\iota(e_1) = \{b_k, a_{i_1}\}$. Si $i_1 \neq 0$, il existe une arête f_1 dans C telle que $\iota(f_1) = \{a_{i_1}, b_{i_1}\}$. Par construction, il existe une arête e_2 et un indice i_2, $0 \leq i_2 < i_1$ tels que $\iota(e_2) = \{b_{i_1}, a_{i_2}\}$. Nous continuons ainsi jusqu'à ce que $i_r = 0$ pour un certain r. Alors l'ensemble

$$C' = (C \setminus \{f_1, \ldots, f_{r-1}\}) \cup \{e_1, \ldots, e_r\}$$

est un couplage sur $\mathscr{G}$ à $m + 1$ éléments, ce qu'il fallait construire. □

Lemme 34. *Soient $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe biparti avec V fini et W une partie de V équilibrée dans $\mathscr{G}$. Si C et D sont des parties de W telles que* $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C)) = \mathrm{Card}(C)$ *et* $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(D)) = \mathrm{Card}(D)$*, alors* $\mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C \cup D)) = \mathrm{Card}(C \cup D)$.

Preuve. En utilisant le fait que W est équilibré, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(D) \\
&= \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C)) + \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(D)) \\
&= \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C) \cup \mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(D)) + \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C) \cap \mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(D)) \\
&\geq \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C \cup D)) + \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C \cap D)) \\
&\geq \mathrm{Card}(C \cup D) + \mathrm{Card}(C \cap D) \\
&= \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(D).
\end{aligned}$$

Toutes ces quantités sont donc égales, et en particulier $\mathrm{Card}(C \cup D) = \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(C \cup D))$. □

Lemme 35. *Soit $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe biparti avec V fini. Si W est une partie équilibrée de V, alors il existe un couplage sur $\mathscr{G}$ recouvrant W.*

Preuve. Soit $\{A, B\}$ une partition de V en parties libres avec $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$. Nous procédons par récurrence sur la cardinalité de $V \setminus W$. Si $V = W$, alors par le lemme 33 il existe une factoristion de $\mathscr{G}$, qui est un couplage sur $\mathscr{G}$ recouvrant V. Supposons maintenant que $W \neq V$. Nous distinguons deux cas.

CAS 1. *Il existe un sommet b dans $B \setminus W$ tel que $A \cap W$ est équilibré dans $\mathscr{G}|(B \setminus \{b\})$.* Il est clair d'autre part que $B \setminus \{b\}$ est équilibré dans $\mathscr{G}|(B \setminus \{b\})$. Par le lemme 32, $\mathscr{G}|(B \setminus \{b\})$ est un graphe dans lequel W est équilibré, et qui ne possède que $\mathrm{Card}(V) - 1$ sommets qui n'appartiennent pas à W. Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{G}|(B \setminus \{b\})$ admet un couplage recouvrant W, qui est aussi un couplage sur $\mathscr{G}$.

CAS 2. *Pour tout b dans $B \setminus W$, $A \cap W$ n'est pas équilibré dans $\mathscr{G}|(B \setminus \{b\})$.* Dans ce cas, nous allons prouver que $\mathscr{G}$ est factorisable. L'hypothèse signifie que pour tout b dans $B \setminus W$ il existe une partie $A(b)$ de $A \cap W$ telle que

$$b \in \mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(A(b)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(A(b))) = \mathrm{Card}(A(b)). \tag{2}$$

Considérons les ensembles $A^* = \bigcup\{A(b) \mid b \in B \setminus W\}$ et $B^* = \mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(A^*)$. Par le lemme 34,

$$\mathrm{Card}(B^*) = \mathrm{Card}(A^*). \tag{3}$$

Par (2), $B \setminus W$ est inclus dans B^*. Vu le lemme 31, il suffit de montrer que $\mathscr{G}|(A^* \cup B^*)$ et $\mathscr{G}|(V \setminus (A^* \cup B^*))$ sont factorisables. L'ensemble A^* est équilibré dans $\mathscr{G}$, et vu que $\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(A^*) \subseteq B^*$, A^* est aussi équilibré dans $\mathscr{G}|(A^* \cup B^*)$. Nous avons que $\{A^*, B^*\}$ est une partition de $A^* \cup B^*$ en parties libres et par (3) que $\mathrm{Card}(A^*) \geq \mathrm{Card}(B^*)$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 33, qui affirme que $\mathscr{G}|(A^* \cup B^*)$ est factorisable. De même, $B \setminus B^*$ est équilibré dans $\mathscr{G}|(V \setminus (A^* \cup B^*))$, $\{B \setminus B^*, A \setminus A^*\}$ est une partition de $V \setminus (A^* \cup B^*)$ en parties libres et $\mathrm{Card}(B \setminus B^*) \geq \mathrm{Card}(A \setminus A^*)$ car $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ et par l'équation (3). Ainsi, le lemme 33 nous donne une factorisation de $\mathscr{G}|(V \setminus (A^* \cup B^*))$. □

Lemme 36. *Soit $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ un graphe biparti, localement fini et équilibré. Si V est dénombrable, alors $\mathscr{G}$ est factorisable.*

Preuve. Si V est fini, alors le lemme 33 nous donne une factorisation de $\mathscr{G}$. Supposons donc V infini dénombrable et écrivons $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ avec un indiçage injectif. Pour tout entier naturel n, soit $\mathscr{G}_n$ la restriction de $\mathscr{G}$ à $V_n = \{v_0, \dots, v_n\}$. C'est un graphe biparti. Posons

$$W_n = \{v \in V_n \mid v \notin \operatorname{adj}_{\mathscr{G}}(V \setminus V_n)\}.$$

Nous montrons que W_n est équilibré dans $\mathscr{G}_n$. Si U est une partie de W_n de cardinal k qui est libre dans $\mathscr{G}_n$, alors en particulier U est libre dans $\mathscr{G}$. Par hypothèse, $\operatorname{adj}_{\mathscr{G}}(U)$ est de cardinal au moins k. Or, vu qu'aucun élément de W_n n'est adjacent à un élément de $V \setminus V_n$, il s'ensuit que $\operatorname{adj}_{\mathscr{G}}(U)$ est inclus dans V_n, ce qui montre que W_n est équilibré dans $\mathscr{G}_n$.

Par le lemme 35, il existe un couplage C_n sur $\mathscr{G}_n$ recouvrant W_n. Par finitude locale, $\operatorname{adj}_{\mathscr{G}}(\{v\})$ est fini pour tout sommet v de $\mathscr{G}$; désignons par $n(v)$ le plus grand entier tel que $v_{n(v)}$ appartient à $\operatorname{adj}_{\mathscr{G}}(\{v\})$. Ainsi, pour tout entier naturel k, si $n \geq n_k = \max\{k, n(v_k)\}$, alors v_k appartient à W_n. Pour tous entiers naturels n et k avec $n \geq n_k$, il existe donc une unique arête $e(n,k)$ dans C_n ayant v_k comme extrémité. Vu que $\mathscr{G}$ est localement fini, l'ensemble $\{e(n,k) \mid n \geq n_k\}$ est fini pour tout entier naturel k. Ainsi, il existe une arête e_0 telle que l'ensemble N_0 des entiers $n \geq n_0$ pour lesquels $e(n,0) = e_0$ est infini ; il existe une arête e_1 telle que l'ensemble N_1 des entiers $n \geq n_1$, $n \in N_0$, pour lesquels $e(n,1) = e_1$ est infini ; il existe une arête e_2 telle que l'ensemble N_2 des entiers $n \geq n_2$, $n \in N_1$, pour lesquels $e(n,2) = e_2$ est infini ; etc. On obtient une suite d'arêtes $(e_r)_{r \in \mathbf{N}}$ avec la propriété suivante : pour tout entier naturel r, il existe une infinité d'entiers $m \geq n_r$ tels que, pour tout entier s avec $1 \leq s \leq r$, $e(m,s) = e_s$. Posons $F = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ et montrons que F est une factorisation de $\mathscr{G}$.

Soit k un entier naturel. Le sommet v_k est une extrémité de e_k, car c'est une extrémité de toutes les arêtes $e(n,k)$ avec $n \geq n_k$, et e_k est l'une d'entre elles. Ainsi, F recouvre V.

Si v_k est une extrémité de e_k et de e_l, alors il existe un entier $n \geq \max\{n_k, n_l\}$ (en fait une infinité) tel que $e(n,k) = e_k$ et $e(n,l) = e_l$, ce qui force $k = l$ car $e(n,k)$ et $e(n,l)$ sont deux arêtes de C_n. Ainsi, F est un couplage sur $\mathscr{G}$, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 37. *Tout graphe biparti, localement fini et équilibré est factorisable.*

Preuve. Soit $\mathscr{G}$ un graphe comme dans l'énoncé. La finitude locale implique que toute composante connexe de $\mathscr{G}$ est dénombrable. En effet, si v est un sommet de $\mathscr{G}$, le nombre de sommets w pour lesquels il existe un chemin de longueur n de v à w est fini, pour tout entier naturel n, et la composante connexe de $\mathscr{G}$ contenant v est alors une union dénombrable d'ensembles finis. Clairement la restriction de $\mathscr{G}$ à l'une de ses composantes connexes est un graphe biparti, localement fini et équilibré. Par le lemme 31, nous pouvons ainsi supposer sans perte de généralité que V est dénombrable. Dans ce cas, le lemme 36 nous donne l'existence d'une factorisation de $\mathscr{G}$. □

Corollaire 38 (Théorème de Kőnig). *Soit $n \geq 1$ un entier. Tout graphe biparti et n-régulier est factorisable.*

Preuve. Dans un graphe n-régulier avec n non nul, il y a au moins k sommets adjacents à k sommets donnés, pour tout entier naturel k. En effet, la somme des degrés de k sommets est kn, qui est inférieure ou égale à la somme des degrés des sommets qui leur sont adjacents. Par conséquent, tout graphe n-régulier est équilibré. D'autre part, il est clair que tout graphe n-régulier est localement fini. L'énoncé est donc un cas particulier du théorème 37. □

Preuve du théorème 30. Soit $n \geq 1$ un entier et supposons que $n[K] = n[L]$ pour certains $[K]$ et $[L]$ dans $\mathscr{T}_0(G, X)$. Soient S et T des éléments des classes $n[K]$ et $n[L]$ respectivement. Alors S et T sont G^*-équidécomposables, et il existe des décompositions $\{S_1, \dots, S_n\}$ et $\{T_1, \dots, T_n\}$ de S et T telles que $[S_i] = [K]$ et $[T_i] = [L]$ pour tout i. Soit ρ une G^*-congruence par morceaux de S vers T, et pour chaque i soient σ_i une G^*-congruence par morceaux de K vers S_i et τ_i une G^*-congruence par morceaux de L vers T_i. Pour tout k dans K et tout l dans L, posons

$\bar{k} = \{\sigma_1(k), \ldots, \sigma_n(k)\}$ et $\bar{l} = \{\tau_1(l), \ldots, \tau_n(l)\}$. Notons $\bar{K} = \{\bar{k} \mid k \in K\}$ et $\bar{L} = \{\bar{l} \mid l \in L\}$; ce sont des partitions de S et T respectivement.

Nous définissons un graphe $\mathscr{G} = (V, E, \iota)$ de la façon suivante : $V = \bar{K} \cup \bar{L}$; E est l'ensemble des (k, l, i, j) tels que $(\rho \circ \sigma_i)(k) = \tau_j(l)$; ι est défini par $\iota(k, l, i, j) = \{\bar{k}, \bar{l}\}$. Il est clair que $\bar{K}$ et $\bar{L}$ sont des parties libres de V, et donc $\mathscr{G}$ est un graphe biparti. Pour chaque k dans K, il y a exactement n arêtes incidentes à $\bar{k}$, à savoir pour chaque i une arête ayant pour autre extrémité l'élément de $\bar{L}$ contenant $(\rho\circ\sigma_i)(k)$. De même, pour chaque l dans L, il y a exactement n arêtes incidentes à $\bar{l}$, à savoir pour chaque j une arête ayant pour autre extrémité l'élément de $\bar{K}$ contenant $(\rho^{-1} \circ \tau_j)(l)$. Ainsi, le graphe $\mathscr{G}$ est n-régulier.

Par le théorème de Kőnig, il existe une factorisation F de $\mathscr{G}$. Si v est un sommet de $\mathscr{G}$, alors il existe une unique arête $e(v)$ dans F telle que v appartient à $\iota(e(v))$. Définissons pour tous i et j les ensembles $K_{ij} = \{k \in K \mid \text{il existe } l \in L \text{ tel que } e(\bar{k}) = (k, l, i, j)\}$ et $L_{ij} = \{l \in L \mid \text{il existe } k \in K \text{ tel que } e(\bar{l}) = (k, l, i, j)\}$. L'application $\tau_j^{-1} \circ \rho \circ \sigma_i \restriction K_{ij}$ est une bijection entre K_{ij} et L_{ij}, d'inverse $\sigma_i^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \tau_j \restriction L_{ij}$, et c'est donc une G^*-congruence par morceaux de K_{ij} vers L_{ij} par la proposition 1 ; ainsi $K_{ij} \sim_{G^*} L_{ij}$. Or

$$\{K_{ij} \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n\} \quad \text{et} \quad \{L_{ij} \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n\}$$

sont des décompositions respectives de K et L, et vu le point 2 du théorème 4, il s'ensuit que K et L sont G^*-équidécomposables, ce qui équivaut à $[K] = [L]$. □

Ce résultat fondamental est à la base de la preuve du théorème de Tarski que nous discuterons dans la section 4.2. Nous utiliserons plus précisément le corollaire ci-dessous.

Corollaire 39. *Soient X un G-ensemble et C une partie de X. Si C n'est pas G-paradoxal, alors pour tout entier naturel n, $(n+1)[C] \nleq n[C]$.*

Preuve. Supposons par contraposition que $(n+1)[C] \leq n[C]$ pour un certain entier naturel n. En utilisant transitivement cette relation, nous obtenons $n[C] \geq (n+1)[C] \geq \cdots \geq 2n[C]$, d'où $[C] \geq 2[C]$ après simplification par n. D'autre part, $[C] \leq 2[C]$, et par le théorème de Banach–Schröder–Bernstein, on conclut que $[C] = 2[C]$, ce qui équivaut à la G-paradoxalité de C. □

2 Le paradoxe de Banach–Tarski et ses généralisations

2.1 Le paradoxe de Hausdorff

Aussi connu sous le nom de paradoxe de la sphère, le paradoxe de Hausdorff affirme que la sphère $\mathbf{S}^2$ est paradoxale sous l'action de son groupe d'isométries directes $SO_3(\mathbf{R})$, qui est un sous-groupe du groupe des déplacements de $\mathbf{R}^3$.

Nous commençons par montrer que $SO_3(\mathbf{R})$ est un groupe paradoxal. Vu les résultats de la section 1.2, il suffit de trouver un sous-groupe de $SO_3(\mathbf{R})$ isomorphe à F_2 pour conclure. La construction donnée ci-dessous est due à S. Świerczkowski [20].

Théorème 40. *Il existe deux éléments indépendants dans $SO_3(\mathbf{R})$.*

Preuve. Considérons les rotations u et v dont les matrices relatives à la base canonique de $\mathbf{R}^3$ sont respectivement

$$U = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ce sont des rotations d'angle $\arccos(3/5)$ autour des axes des cotes et des abscisses respectivement. Vérifions que u et v sont indépendants.

Soit w un mot réduit non trivial en u, v, u^{-1} et v^{-1}. Nous allons montrer par récurrence que w n'est pas égal à l'identité. Vu que uwu^{-1} et $u^{-1}wu$ ne sont l'identité que si w est l'identité, nous pouvons supposer sans perte de généralité que w se termine en u ou en u^{-1}. Nous allons montrer que $w(1,0,0) = (a,b,c)/5^k$ pour certains entiers a, b et c avec b non divisible par 5 (en particulier $b \neq 0$) et où k est la longueur du mot w. Ceci impliquera que $w(1,0,0) \neq (1,0,0)$ et ainsi achèvera la démonstration. Dans ce qui suit nous utiliserons les symboles $\pm$ et $\mp$, et il sera sous-entendu que ces symboles sont corrélés tout au long d'un même contexte ; par exemple, $\pm a = -(\mp a)$ est toujours vrai alors que $\pm a = -(\pm a)$ implique $a = 0$.

Si w est de longueur 1, alors w est soit u soit u^{-1} et nous calculons que $w(1,0,0)$ est $(3,4,0)/5$ ou $(3,-4,0)/5$, ce qui vérifie le résultat annoncé. Supposons maintenant que le résultat est vérifié pour des mots de longueur inférieure ou égale à $k-1$, et écivons $w = \nu w'$ où ν est u, u^{-1}, v ou v^{-1} et où w' est un mot de longueur $k-1$. Par hypothèse de récurrence, $w'(1,0,0) = (a',b',c')/5^{k-1}$ où a, b et c sont des entiers avec b non divisible par 5. Alors $w(1,0,0) = (a,b,c)/5^k$ où $a = 3a' \mp 4b'$, $b = 3b' \pm 4a'$ et $c = 5c'$ si $\nu = u^{\pm 1}$ ou $a = 5a'$, $b = 3b' \mp 4c'$ et $c = 3a' \pm 4b'$ si $\nu = v^{\pm 1}$ respectivement. Ainsi, a, b et c sont des entiers. Il reste à montrer que b n'est divisible par 5 en aucun cas. Pour ce faire, nous écrivons $w' = \nu' w''$ de la même façon qu'auparavant avec $w''(1,0,0) = (a'',b'',c'')/5^{k-2}$ et nous considérons quatre cas.

(a) Si w commence par $u^{\pm 1}v^{\pm 1}$ ou $u^{\pm 1}v^{\mp 1}$, alors $b = 3b' \pm 4a'$ et 5 divise a' car $a' = 5a''$.

(b) Si w commence par $v^{\pm 1}u^{\pm 1}$ ou $v^{\pm 1}u^{\mp 1}$, alors $b = 3b' \mp 4c'$ et 5 divise c' car $c' = 5c''$.

(c) Si w commence par $u^{\pm 2}$, alors $b = 3b' \pm 4a' = 3b' \pm (12a'' \mp 16b'') = 3b' + 9b'' \pm 12a'' - 16b'' - 9b'' = 3b' + 3(3b'' \pm 4a'') - 25b'' = 6b' - 25b''$.

(d) Si w commence par $v^{\pm 2}$, nous trouvons comme en (c) que $b = 6b' - 25b''$.

Vu que par l'hypothèse de récurrence 5 ne divise pas b', il s'ensuit dans tous les cas que 5 ne divise pas b, ce qui complète la preuve. □

Soit donc H un sous-groupe de $SO_3(\mathbf{R})$ isomorphe F_2 (par exemple celui que nous avons construit ci-dessus). Le groupe H agit sur la sphère $\mathbf{S}^2$. Sachant que l'action de H sur $\mathbf{S}^2$ est localement commutative (le stabilisateur d'un point est isomorphe à un sous-groupe de $SO_2(\mathbf{R})$ qui est abélien), nous obtenons du corollaire 21 et de la proposition 8 le résultat suivant.

Théorème 41 (Paradoxe de Hausdorff). *La sphère $\mathbf{S}^2$ est $SO_3(\mathbf{R})$-paradoxale avec quatre morceaux, et pas moins de quatre.*

Une démarche plus directe mais moins efficace (utilisant dix morceaux) s'obtient comme suit. Si H est un sous-groupe libre de rang 2 de $SO_3(\mathbf{R})$, l'ensemble D des points de $\mathbf{S}^2$ fixés par une rotation non triviale de H est dénombrable, car H est dénombrable et une rotation non triviale possède exactement deux points fixes sur la sphère. Ainsi, par les propositions 11 et 10, nous obtenons que $\mathbf{S}^2 \setminus D$ est $SO_3(\mathbf{R})$-paradoxal, et nous pouvons conclure en utilisant la proposition ci-dessous.

Proposition 42. *Soit D un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{S}^2$. Alors $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}^2 \setminus D$ sont $SO_3(\mathbf{R})$-équidécomposables.*

Preuve. Vu que D est dénombrable, il existe un point d sur la sphère tel que d et $-d$ n'appartiennent pas à D. Soit L la droite passant par d et $-d$. Pour x et y dans D et $n \geq 1$ un entier, considérons l'ensemble $R_n(x, y)$ des rotations ρ d'axe L telles que $\rho^n(x) = y$. Si x et y ne sont pas contenus dans un plan normal à L, alors $R_n(x, y)$ est vide. Sinon, vu que x n'est pas dans L, $R_n(x, y)$ contient exactement n rotations (à savoir les rotations d'axe L et d'angle $(\alpha + 2k\pi)/n$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ où α est l'angle de la rotation d'axe L qui envoie x sur y). Par conséquent, l'ensemble $R = \bigcup\{R_n(x, y) \mid n \geq 1,\, x \in D,\, y \in D\}$ est dénombrable. D'autre part, l'ensemble de toutes les rotations d'axe L n'est *pas* dénombrable, et par conséquent il existe une rotation r d'axe L qui n'appartient pas à R, c'est-à-dire telle que $r^n(x) \neq y$ pour tous x et y dans D et tout entier $n \geq 1$. Posons $U = \bigcup\{r^n(D) \mid n \geq 0\}$. Alors $r(U) = U \setminus D$, et par suite $\mathbf{S}^2 = U \cup (\mathbf{S}^2 \setminus U) \sim_{SO_3(\mathbf{R})} (U \setminus D) \cup (\mathbf{S}^2 \setminus U) = \mathbf{S}^2 \setminus D$. □

2.2 Le théorème de Banach–Tarski dans $\mathbf{R}^3$

On note $\mathbf{B}^n$ la boule unité fermée centrée à l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Le groupe de rotations $SO_3(\mathbf{R})$ agit localement commutativement sur $\mathbf{B}^3 \setminus \{0\}$ et $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ (en fait sur toute partie de $\mathbf{R}^3$ stable sous l'action de $SO_3(\mathbf{R})$ et dépourvue de l'origine). Nous obtenons ainsi que ces ensembles sont $SO_3(\mathbf{R})$-paradoxaux avec quatre morceaux. Alternativement, on peut étendre à ces ensembles une décomposition paradoxale donnée de la sphère en ajoutant les rayons (pour $\mathbf{B}^3 \setminus \{0\}$) ou les demi-droites (pour $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$). Il est alors facile d'en déduire la paradoxalité de la boule $\mathbf{B}^3$ et de l'espace tout entier $\mathbf{R}^3$, en remarquant le fait suivant.

Proposition 43. *Soient $d \geq 2$ un entier et X une partie non vide de $\mathbf{R}^d$ sur laquelle le groupe $SO_d(\mathbf{R})$ agit. Alors pour tout p dans $\mathbf{R}^d \setminus X$, $X \sim X \cup \{p\}$.*

Preuve. Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ un élément de X et considérons l'ensemble

$$D = \{(x_1 \cos n - x_2 \sin n, x_1 \sin n + x_2 \cos n, x_3, \dots, x_d) \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

L'ensemble D est inclus dans X, car chaque point de D peut s'écrire $g(x)$ pour un certain g dans $SO_d(\mathbf{R})$. Soit ρ la rotation de 1 radian fixant les $d-2$ dernières coordonnées. Puisqu'aucun multiple de 2π n'est entier, il est évident que $\rho(D) = D \setminus \{x\}$, d'où $X \cup \{p\} = (X \setminus D) \cup D \cup \{p\} \sim (X \setminus D) \cup (D \setminus \{x\}) \cup \{p\} = (X \setminus \{x\}) \cup \{p\}$. Or, $(X \setminus \{x\}) \cup \{p\}$ et X sont équidécomposables par translations, en utilisant les décompositions $\{X \setminus \{x\}, \{p\}\}$ et $\{X \setminus \{x\}, \{x\}\}$. Par transitivité, on conclut que $X \sim X \cup \{p\}$. □

Cette proposition s'applique en particulier pour $X = \mathbf{B}^3 \setminus \{0\}$ et $X = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ avec $p = 0$, auxquels cas nous trouvons $\mathbf{B}^3 \setminus \{0\} \sim \mathbf{B}^3$ et $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \sim \mathbf{R}^3$. De la proposition 9, nous obtenons le célèbre paradoxe de Banach–Tarski et un résultat semblable pour $\mathbf{R}^3$:

Corollaire 44 (Paradoxe de Banach–Tarski). *La boule fermée $\mathbf{B}^3$ est paradoxale.*

Corollaire 45. *L'espace $\mathbf{R}^3$ est paradoxal.*

Remarquons que dans cette construction, nous avons perdu la $SO_3(\mathbf{R})$-paradoxalité au profit d'une paradoxalité plus faible utilisant des rotations et des translations. En fait, ni $\mathbf{B}^3$ ni $\mathbf{R}^3$ ne sont $SO_3(\mathbf{R})$-paradoxaux, car l'origine est fixé par $SO_3(\mathbf{R})$ et ne peut être à la fois dans deux ensembles disjoints. Cependant, nous n'avons utilisé que des déplacements. Ceci n'est d'aucune importance pour l'instant, mais nous montrerons en appendice comment le paradoxe de Banach–Tarski peut être réalisé de manière continue dans l'espace. Il sera alors fondamental que le groupe considéré soit connexe par arcs, ce qui est le cas du groupe des déplacements mais non du groupe des isométries tout entier.

Proposition 46. *Soit $d \geq 1$ un entier, G un groupe de transformations affines de $\mathbf{R}^d$ contenant $T_d(\mathbf{R})$ et Q une partie de $\mathbf{R}^d$ bornée et d'intérieur non vide. Si Q est (dénombrablement) G-paradoxal, alors deux parties quelconques de $\mathbf{R}^d$ bornées et d'intérieurs non vides sont (dénombrablement) G-équidécomposables.*

Preuve. Nous formulons la preuve sous l'hypothèse de G-paradoxalité, mais elle s'applique aussi bien au cas dénombrable.

Soit H le groupe engendré par les homothéties et les translations de $\mathbf{R}^d$, et soit $\mathscr{Q}$ l'ensemble de toutes les images de Q par H. Le groupe G est un produit semi-direct $(G \cap GL_d(\mathbf{R})) \ltimes T_d(\mathbf{R})$, et ainsi tout élément g de G peut s'écrire $g = h \circ t$ où h est une application linéaire et t est une translation. Il s'ensuit que le groupe G est normalisé par H, car le groupe des homothéties est central dans $GL_d(\mathbf{R})$ et le groupe des translation est distingué dans le groupe affine $GA_d(\mathbf{R})$. Par conséquent, tous les éléments de $\mathscr{Q}$ sont G-paradoxaux. Puisque $T_d(\mathbf{R}) \subseteq G$, un élément de $\mathscr{Q}$ est effectivement G-équidécomposables à une réunion disjointe de deux copies translatées de lui-même, et par suite d'un nombre fini quelconque de copies.

Soient B et B' deux éléments de $\mathscr{Q}$, et supposons pour fixer les idées que $\operatorname{diam} B \leq \operatorname{diam} B'$. Il existe alors un recouvrement à n éléments $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ de B' où chaque B_i est un éléments de $\mathscr{Q}$ $T_d(\mathbf{R})$-congruent à B. Considérons un ensemble de n éléments de $\mathscr{Q}$ deux à deux disjoints et $T_d(\mathbf{R})$-congruents à B, disons $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$. À partir de $\mathscr{B}$ nous construisons un recouvrement $\mathscr{B}^* = \{B_1^*, \ldots, B_n^*\}$ de B' par des ensembles disjoints de la façon suivante : posons $B_1^* = B_1$ puis définissons récursivement $B_i^* = B_i \setminus \bigcup\{B_1, \ldots, B_{i-1}\}$ pour $2 \leq i \leq n$. Chaque B_i^* est G-subdécomposable à C_i, et par le point 2 du théorème 4, $\bigcup \mathscr{B}^*$ est G-subdécomposable à $\bigcup \mathscr{C}$. Nous avons donc $B \precsim_G B' \precsim_G \bigcup \mathscr{B}^* \precsim_G \bigcup \mathscr{C} \sim_G B$, et tous ces ensembles sont G-équidécomposables par le théorème de Banach–Schröder–Bernstein.

Nous avons prouvé que deux éléments quelconques de $\mathscr{Q}$ sont G-équidécomposables. Pour prouver le théorème, il suffit, par transitivité, de montrer que toute partie bornée et d'intérieur non vide est G-équidécomposable à Q. Soit donc A une telle partie. Il existe Q_1 et Q_2 dans $\mathscr{Q}$ tels que $Q_1 \subseteq A \subseteq Q_2$. Ainsi, $A \precsim_G Q_2 \sim_G Q \sim_G Q_1 \precsim_G A$, d'où $A \sim_G Q$ par le théorème de Banach–Schröder–Bernstein. $\square$

La proposition ci-dessus a été énoncée dans un cadre un peu plus général que celui de cette section, en vue d'applications futures. L'hypothèse de la proposition étant satisfaite pour $d = 3$, $G = D_3(\mathbf{R})$ et $Q = \mathbf{B}^3$, nous obtenons :

Corollaire 47 (Théorème de Banach–Tarski). *Deux parties quelconques de $\mathbf{R}^3$ bornées et d'intérieurs non vides sont équidécomposables.*

2.3 Cinq morceaux suffisent

Comme nous l'avons remarqué dans la section 2.1, le thèorème 40 et le corollaire 21 donnent immédiatement que toute sphère centrée à l'origine est $SO_3(\mathbf{R})$-paradoxale avec quatre morceaux. D'autre part, vu la proposition 8, cette décomposition paradoxale est minimale. Nous montrons maintenant comment cette décomposition paradoxale minimale peut être utilisée pour trouver une décomposition paradoxale minimale de la boule $\mathbf{B}^3$.

Théorème 48. *La boule fermée $\mathbf{B}^3$ n'est pas $\operatorname{Isom}(\mathbf{R}^3)$-paradoxale avec moins de cinq morceaux.*

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Vu la proposition 8, la seule possibilité pour une décomposition paradoxale avec moins de cinq morceaux est une décomposition avec quatre morceaux disjoints A_1, A_2, A_3 et A_4 qui vérifient $g_1(A_1) \cup g_2(A_2) = \mathbf{B}^3 = g_3(A_3) \cup g_4(A_4)$ (les réunions étant disjointes) pour certaines isométries g_1, g_2, g_3 et g_4. Au moins une de ces quatre isométries ne fixe pas l'origine, disons g_1, car l'origine doit être à la fois dans $g_1(A_1) \cup g_2(A_2)$ et $g_3(A_3) \cup g_4(A_4)$ mais n'appartient qu'à l'un des A_i. Alors $g_1(\mathbf{B}^3)$ est une boule unité qui n'est pas centrée à l'origine, et par conséquent il existe un hémisphère fermé (c'est-à-dire contenant un grand cercle) H de $\mathbf{S}^2$ tel que H et $g_1(\mathbf{B}^3)$ sont disjoints. Or, $g_1(A_1) \subset g_1(\mathbf{B}^3)$, et vu que $g_1(A_1) \cup g_2(A_2) = \mathbf{B}^3$, il faut que H soit entièrement contenu dans $g_2(A_2)$, ce qui implique que A_2 contient $g_2^{-1}(H)$. L'ensemble $g_2^{-1}(H)$ est isométrique à un hémisphère fermé de rayon 1 et est entièrement contenu dans la boule $\mathbf{B}^3$, donc $g_2^{-1}(H)$ est un hemisphère fermé de $\mathbf{S}^2$. Étant donné que les A_i sont disjoints, $(A_3 \cup A_4) \cap \mathbf{S}^2$ est contenu dans le complémentaire de $g_2^{-1}(H)$ dans $\mathbf{S}^2$, un hémisphère ouvert. Si g_3 (resp. g_4) ne fixait pas l'origine, alors A_4 (resp. A_3) devrait à nouveau contenir un hémisphère fermé, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, g_3 et g_4 fixent l'origine, et par conséquent $\mathbf{S}^2$ tout entier. À la fois $g_3(A_3 \cap \mathbf{S}^2)$ et $g_4(A_4 \cap \mathbf{S}^2)$ sont contenus dans des hémisphères ouverts, donc $\mathbf{S}^2 = \mathbf{B}^3 \cap \mathbf{S}^2 = (g_3(A_3) \cup g_4(A_4)) \cap \mathbf{S}^2 = g_3(A_3 \cap \mathbf{S}^2) \cup g_4(A_4 \cap \mathbf{S}^2)$ est contenu dans la réunion de deux hémisphères ouverts de $\mathbf{S}^2$. C'est une contradiction. □

Théorème 49. *La boule fermée $\mathbf{B}^3$ est paradoxale avec cinq morceaux.*

Preuve. Soit H un sous-groupe de $SO_3(\mathbf{R})$ isomorphe à F_2, engendré par u et v. Le groupe H agit sur $B = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < \|x\| < 1\}$, et cette action est localement commutative car le stabilisateur d'un point de B est isomorphe à un sous-groupe de $SO_2(\mathbf{R})$. Par le corollaire 21, il existe une décomposition $\{B_1, B_2, B_3, B_3\}$ de B telle que $B_1 \cup u(B_2) = B = B_3 \cup v(B_4)$.

Nous allons construire une décomposition $\{S_1, S_2, S_3, S_4, \{p\}\}$ de $\mathbf{S}^2$ telle que $S_1 \cup u(S_2) = \mathbf{S}^2 = S_3 \cup v(S_4)$. Le point p pourra alors être utilisé pour prendre la place de l'origine. Comme dans la preuve du théorème 17, il suffit de définir S_1, S_2, S_3 et S_4 orbite par orbite. Soit p un point quelconque de $\mathbf{S}^2$ qui n'est fixé par aucun élément non trivial de H (un tel point existe car l'ensemble des points de $\mathbf{S}^2$ fixé par un élément non trivial de H est dénombrable). Si O est une orbite qui ne contient pas le point p, soit $\{S_1(O), S_2(O), S_3(O), S_4(O)\}$ une décomposition de O vérifiant $S_1(O) \cup u(S_2(O)) = B = S_3(O) \cup v(S_4(O))$. Pour l'orbite P du point p, nous définissons $S_i(P)$ de la façon suivante. Si q est un point de $P \setminus \{p\}$ et si w est l'unique mot réduit en u, u^{-1}, v et v^{-1} tel que $w(p) = q$ (unique car le stabilisateur de p est trivial), alors le point q appartient à $S_1(P)$, $S_2(P)$, $S_3(P)$ ou $S_4(P)$ suivant que w commence par u, u^{-1}, v ou v^{-1}. Cette décomposition de $P \setminus \{p\}$ vérifie alors $S_1(P) \cup u(S_2(P)) = P = S_3(P) \cup v(S_4(P))$. Pour $1 \leq i \leq 4$, nous posons $S_i = \bigcup\{S_i(O) \mid O \text{ est une orbite de } H \text{ sur } \mathbf{S}^2\}$. Les S_i vérifient alors les relations souhaitées.

Nous pouvons maintenant construire une décomposition paradoxale de $\mathbf{B}^3$ avec cinq morceaux. Posons $A_1 = \{0\} \cup B_1 \cup S_1$, et pour $2 \leq i \leq 4$, $A_i = B_i \cup S_i$, de sorte que $\{A_1, A_2, A_3, A_4, \{p\}\}$ est une décomposition de $\mathbf{B}^3$. Soit t la translation de vecteur $-p$. Alors $A_1 \cup u(A_2) = \mathbf{B}^3 = A_3 \cup v(A_4) \cup t(\{p\})$ et les réunions sont disjointes, ce qui signifie que $\mathbf{B}^3$ est paradoxal avec cinq morceaux. □

2.4 Généralisations à $\mathbf{R}^d$

Dans cette section, nous notons $X_d = \mathbf{S}^{d-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\}$.

Lemme 50. *Pour tout $d \geq 2$, X_d et $\mathbf{S}^{d-1}$ sont $SO_d(\mathbf{R})$-équidécomposables.*

Preuve. Notons $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ les pôles de $\mathbf{S}^{d-1}$. Soit ρ la rotation de $SO_d(\mathbf{R})$ d'angle 1 radian fixant les $d-2$ premières coordonnées. Posons $D = \{(0, \ldots, 0, \sin n, \cos n) \in \mathbf{S}^{d-1} \mid n \in \mathbf{N}\}$ et $E = \{(0, \ldots, 0, -\sin n, -\cos n) \in \mathbf{S}^{d-1} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Alors D et E sont disjoints, $\rho(D) = D \setminus \{N\}$ et $\rho(E) = E \setminus \{S\}$. Ainsi, en considérant les décompositions évidentes, on obtient que $\mathbf{S}^{d-1} \sim_{SO_d(\mathbf{R})} X_d$. □

Théorème 51. *Pour tout $d \geq 3$, la sphère $\mathbf{S}^{d-1}$ est $SO_d(\mathbf{R})$-paradoxale.*

Preuve. Nous prouvons ce résultat par récurrence, l'idée étant d'utiliser le fait que l'intersection de la sphère $\mathbf{S}^{d-1}$ avec $\mathbf{R}^{d-1} \times \{0\}$ est isométrique à $\mathbf{S}^{d-2}$, et une décomposition de $\mathbf{S}^{d-2}$ peut alors s'étendre à X_d suivant les cercles polaires. Le cas $d = 3$ a déjà été démontré. Supposons donc d supérieur ou égal à 4. Par hypothèse de récurrence, il existe deux sous-ensembles disjoints A et B de $\mathbf{S}^{d-2}$, des décompositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{S_1, \ldots, S_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_m\}$ et $\{T_1, \ldots, T_m\}$ de A, $\mathbf{S}^{d-2}$, B et $\mathbf{S}^{d-2}$ respectivement, et des éléments $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_m$ de $SO_{d-1}(\mathbf{R})$ vérifiant $g_i A_i = S_i$ et $h_j B_j = T_j$, pour tous i et j. Si E est une partie de $\mathbf{S}^{d-2}$, posons

$$E^* = \{(x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d) \in X_d \mid (x_1, \ldots, x_{d-1})/\|(x_1, \ldots, x_{d-1})\| \in E\},$$

où $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^{d-1}$. Alors $\{A_1^*, \ldots, A_n^*\}$ et $\{B_1^*, \ldots, B_m^*\}$ sont des décompositions de A^* et B^*, qui sont des sous-ensembles disjoints de X_d. De même, $\{S_1^*, \ldots, S_n^*\}$

et $\{T_1^*, \ldots, T_m^*\}$ sont deux décompositions de X_d. Si g est une rotation, notons $[g]$ sa matrice par rapport à la base canonique. Nous définissons, pour tout g dans $SO_{d-1}(\mathbf{R})$, une rotation g^* dans $SO_d(\mathbf{R})$ par

$$[g^*] = \begin{pmatrix} [g] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les rotations $g_1^*, \ldots, g_n^*, h_1^*, \ldots, h_m^*$ vérifient $g_i^* A_i^* = S_i^*$ et $h_j^* B_j^* = T_j^*$. Ainsi, X_d est $SO_d(\mathbf{R})$-paradoxal, et par le lemme 50 et la proposition 9, il s'ensuit que $\mathbf{S}^{d-1}$ est $SO_d(\mathbf{R})$-paradoxal. □

Corollaire 52. *Soit $d \geq 3$ un entier. La boule $\mathbf{B}^d$ est paradoxale, de même que $\mathbf{R}^d$ tout entier.*

Preuve. Il suffit d'étendre la décomposition paradoxale de $\mathbf{S}^{d-1}$ à $\mathbf{B}^d \setminus \{0\}$ et $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ par l'adjonction des rayons et des demi-droites, puis de conclure par la proposition 43. □

Corollaire 53 (Théorème de Banach–Tarski dans $\mathbf{R}^d$). *Si $d \geq 3$, deux parties quelconques de $\mathbf{R}^d$ bornées et d'intérieurs non vides sont équidécomposables.*

Preuve. C'est une conséquence du corollaire 52 et de la proposition 46. □

Le résultat plus fort sur le nombre minimal de morceaux nécessaires à la duplication de $\mathbf{S}^2$ est plus difficile à généraliser, car la propriété de commutativité locale de l'action d'un sous-groupe de $SO_3(\mathbf{R})$ disparaît s'il est plongé comme ci-dessus dans un groupe de rotations de dimension supérieure. Des sous-groupes libres de rang 2 de $SO_d(\mathbf{R})$ dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est libre ou localement commutative existent néanmoins et nous permettent de résoudre n'importe quel système de congruences propre et faible sur $\mathbf{S}^{d-1}$, $\mathbf{B}^d \setminus \{0\}$ et $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. En particulier, ces ensembles sont $SO_d(\mathbf{R})$-paradoxaux avec quatre morceaux. Plus précisément :

***Théorème 54.** *Soit $d \geq 3$ un entier. Si d est pair, $SO_d(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe libre de rang 2 qui agit librement sur $\mathbf{S}^{d-1}$. Si d est impair, $SO_d(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe libre de rang 2 dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative.*

Ce résultat ne peut pas être amélioré, car pour d impair, tout élément de $SO_d(\mathbf{R})$ a 1 comme valeur propre, donc fixe au moins deux points de $\mathbf{S}^{d-1}$. La preuve de ce théorème dans le cas général, que nous ne démontrons pas ici, fait appel à la théorie des groupes de Lie. Le lecteur intéressé en trouvera une preuve complète dans l'article d'Armand Borel [2] (pour une preuve partielle plus élémentaire, voir Wagon [23]). Ce théorème est admis dans la prochaine section.

2.5 Le paradoxe de Banach–Tarski généralisé au continu

Dans cette section, d est un entier supérieur ou égal à 3. Les résultats que nous donnons concernent $\mathbf{S}^{d-1}$, mais nous verrons qu'ils s'appliquent en réalité à de nombreuses autres parties de $\mathbf{R}^d$.

Le paradoxe de la sphère consiste essentiellement en l'existence d'un sous-groupe de $SO_d(\mathbf{R})$ isomorphe à F_2 dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative. On en déduit alors la $SO_d(\mathbf{R})$-paradoxalité de la sphère des résultats de la section 1.3, ainsi que la $SO_d(\mathbf{R})$-divisibilité par 3 de celle-ci.

Une première observation intéressante est la suivante.

Proposition 55. *Pour tout cardinal $\kappa \leq \aleph_0$, F_2 possède un sous-groupe libre de rang κ.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'il existe un sous-groupe libre de rang $\aleph_0$ dans F_2. Ce sous-groupe aura alors des sous-groupes libres de rang κ pour tout $\kappa < \aleph_0$.

Soient a et b des générateurs de F_2. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $p_n = a^n b^n$. Vérifions que l'ensemble $L = \{p_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, de cardinalité $\aleph_0$, est une partie libre de F_2. Nous allons montrer par récurrence que pour tout entier $r \geq 1$, tout mot réduit en $L \cup L^{-1}$ de la forme $p_{n_1}^{k_1} \cdots p_{n_r}^{k_r}$ (où les n_i sont distincts et les k_i non nuls) se termine, comme mot réduit en a, a^{-1}, b et b^{-1}, par b^{n_r} si $k_r > 0$ et par a^{-n_r} si $k_r < 0$. Le cas $r = 1$ est évident. Si $r \geq 2$, considérons un produit de la forme

$$P = p_{n_1}^{k_1} \cdots p_{n_r}^{k_r}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que $k_{r-1} > 0$. Par hypothèse de récurrence, le mot réduit $P' = p_{n_1}^{k_1} \cdots p_{n_{r-1}}^{k_{r-1}}$ se termine par $b^{n_{r-1}}$. Si $k_r > 0$, alors $p_{n_r}^{k_r}$ commence par a, et donc il n'y a pas de réduction possible lors de la concaténation de P' et $p_{n_r}^{k_r}$. Dans ce cas, P se termine, comme mot réduit en a, a^{-1}, b et b^{-1}, par b^{n_r}. Si $k_r < 0$, alors $p_{n_r}^{k_r}$ commence par b^{-n_r}, tandis que P' se termine par $b^{n_{r-1}}$; étant donné que $n_{r-1} \neq n_r$, la réduction lors de la concaténation de P' et $p_{n_r}^{k_r}$ n'affecte pas le segment final a^{-n_r} de $p_{n_r}^{k_r}$. On traite de manière analogue le cas $k_{r-1} < 0$.

Ainsi, aucun mot réduit en $L \cup L^{-1}$ n'est l'élément neutre de F_2, ce qui montre que L engendre un groupe libre de rang $\aleph_0$. □

Une conséquence du théorème 54 est donc que, pour tout $\kappa \leq \aleph_0$, $SO_d(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe isomorphe à F_κ dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative (et même libre si d est pair). Par la proposition 21, nous obtenons ainsi non seulement que la sphère $\mathbf{S}^{d-1}$ peut être dupliquée à volonté, ce que nous savions déjà, mais même qu'il est possible d'obtenir un nombre infini dénombrable de sphère à partir d'une seule !

Il est possible d'améliorer encore ce résultat et d'obtenir un nombre non dénombrable de sphères à partir d'une seule. Plus précisément, $\mathbf{S}^{d-1}$ admet une partition non dénombrable dont chaque élément est $SO_d(\mathbf{R})$-équidécomposable avec deux morceaux à $\mathbf{S}^{d-1}$ tout entier. Évidemment, une telle partition peut avoir au plus $\mathrm{Card}(\mathbf{S}^{d-1}) = 2^{\aleph_0}$ éléments. Nous allons montrer qu'il existe une telle partition avec n'importe quelle cardinalité inférieure ou égale à $2^{\aleph_0}$. Il suffit pour cela de montrer qu'il existe un sous-groupe libre de $SO_d(\mathbf{R})$ de rang $2^{\aleph_0}$ dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative, car un tel groupe admet des sous-groupes libres de n'importe quel rang inférieur à $2^{\aleph_0}$ (ce résultat nécessite l'axiome du choix).

Soit L un corps et K est un sous-corps de L. Une partie $A = \{a_\alpha \mid \alpha < \mathrm{Card}(A)\}$ de L (indicée injectivement) est dite *algébriquement indépendante* sur K si pour tout polynôme non nul P sur K à $\mathrm{Card}(A)$ indéterminées, l'évaluation de P en $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{Card}(A)}$ est non nulle.

Une méthode pour parvenir à construire de tels sous-groupes libres de $SO_d(\mathbf{R})$ consiste dans un premier temps à montrer l'existence d'une partie de $\mathbf{R}$ algébriquement indépendante sur $\mathbf{Q}$ de cardinalité $2^{\aleph_0}$. L'existence d'une telle partie de $\mathbf{R}$ est facilement démontrée avec l'axiome du choix. Considérons en effet l'ensemble $\mathscr{A}$ des parties infinies de $\mathbf{R}$ algébriquement indépendantes sur $\mathbf{Q}$, ordonné par inclusion. Si A appartient à $\mathscr{A}$, alors le cardinal de l'ensemble des nombres réels algébriques sur A est $\aleph_0 \,\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A)$. Par conséquent, aucune partie de $\mathbf{R}$ dont le cardinal est strictement inférieur à $2^{\aleph_0}$ n'est maximale dans $\mathscr{A}$. Or $\mathscr{A}$ est un ensemble inductif et non vide, et le lemme de Zorn nous assure l'existence d'un élément maximal de $\mathscr{A}$, qui est alors nécessairement de cardinal $2^{\aleph_0}$. Il est également possible, avec les *nombres de von Neumann* (voir [13]), de construire explicitement une telle partie de $\mathbf{R}$. On peut ensuite en déduire une partie libre de $SO_d(\mathbf{R})$ de cardinalité $2^{\aleph_0}$ (voir Wagon [23] Theorem 6.4). Une démarche semblable sera utilisée dans la preuve du théorème 67.

Nous allons exposer ici une méthode différente, basée sur le théorème suivant de J. Mycielski [12].

Théorème 56 (Théorème de Mycielski). *Soient X un espace métrique complet et sans points isolés et $\mathscr{R} = \{R_j \mid j \in \mathbf{N}\}$ un ensemble de relations sur X, chaque R_j d'arité $m_j \geq 1$. Si R_j est une partie nulle part dense de X^{m_j} pour tout j, alors il existe une partie F de X de cardinalité $2^{\aleph_0}$ telle que, pour tout j, aucun m_j-uple d'éléments de F n'appartient à R_j.*

Preuve. Appelons *suite binaire finie* un élément de $S = \bigcup\{\{0,1\}^n \mid n \in \mathbf{N}\}$. La longueur d'une suite binaire finie s est notée $\ell(s)$. Munissons l'ensemble $S \cup \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ de l'ordre suivant : pour $s \in \{0,1\}^n$ et $t \in \{0,1\}^m$, $s \leq t$ si et seulement si $n \leq m$ et $t \upharpoonright n = s$. Supposons qu'il existe une collection d'ouverts non vides $\{V_s \mid s \in S\}$ de X vérifiant les propriétés suivantes :

1. $V_\varnothing = X$;
2. pour toute suite binaire finie s, $\bar{V}_{s0} \subseteq V_s$ et $\bar{V}_{s1} \subseteq V_s$;
3. pour toute suite binaire finie s, V_{s0} et V_{s1} sont disjoints ;
4. pour toute suite binaire finie s, $\operatorname{diam} V_s \leq 1/\ell(s)$;
5. pour tous entiers naturels r et j avec $j \leq r$ et toutes suites binaires distinctes $s_1, \ldots, s_{m_j}$ de longueur r, les ensembles $\prod_{k=1}^{m_j} V_{s_k}$ et R_j sont disjoints.

Dans ce cas, la complétude de X implique, vu la condition 2, que pour toute suite binaire infinie a l'ensemble $\{\bar{V}_s | s \leq a\}$ a une intersection non vide. D'autre part, la condition 4 implique que cette intersection est réduite à un seul point, que nous notons $x(a)$, et la condition 3 implique que si b est une suite binaire infinie différente de a, alors $x(a) \neq x(b)$. L'ensemble $F = \{x(a) | a \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}\}$ a les propriétés désirées. En effet, F a la même cardinalité que $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, et la condition 5 implique qu'aucun m_i-uple d'éléments de F n'appartient à R_j.

Il suffit donc de montrer que les hypothèses sur X impliquent l'existence d'une telle collection d'ouverts. Nous définissons cette collection par récurrence sur la longueur de l'indice, en commençant par poser $V_\varnothing = X$, qui est non vide en tant qu'espace métrique. Supposons que V_s est défini dès que s est de longueur inférieure ou égale à n et soit t une suite binaire finie de longueur n. L'ouvert V_t contient au moins deux points x et y, car X est sans points isolés. Soit $m \geq n+2$ un entier tel que les boules $B(x, 1/(m-1))$ et $B(y, 1/(m-1))$ sont contenues dans V_s et disjointes. Les ouverts $V'_{t0} = B(x, 1/m)$ et $V'_{t1} = B(y, 1/m)$ vérifient ainsi les conditions 2 à 4, c'est-à-dire $\bar{V}'_{ti} \subseteq V_t$, $V'_{t0} \cap V'_{t1} = \varnothing$ et $\operatorname{diam} V'_{ti} \leq 1/(n+1)$ pour tout i dans $\{0,1\}$.

Pour obtenir des ouverts qui satisfont aussi la condition 5, nous allons montrer comment, étant donné un m_j-uple $(s_1, \ldots, s_{m_j})$ de suite binaires distinctes de longueur $n+1$ pour un certain $j \leq n+1$ et une collection d'ouverts non vides $\{U_s \mid s \in \{0,1\}^{n+1}\}$ qui vérifient les conditions 2–4, nous pouvons obtenir une nouvelle collection d'ouverts $\{U'_s \mid s \in \{0,1\}^{n+1}\}$ satisfaisant 2–4 et la condition supplémentaire $\prod_{k=1}^{m_j} U'_{s_k} \cap R_j = \varnothing$. Il suffira alors d'appliquer ce procédé pour chaque m_j-uple de suites binaires distinctes de longueur $n+1$ et pour chaque entier naturel $j \leq n+1$ avec $m_j \leq 2^{n+1}$ (si $m_j > 2^{n+1}$ il n'existe aucun m_j-uple de suites binaires distinctes de longueur $n+1$, et donc la condition 5 est trivialement satisfaite pour j) à partir de la collection $\{V'_s \mid s \in \{0,1\}^{n+1}\}$. Nous obtiendrons alors des ouverts indicés par les suites binaires de longueur $n+1$ et satisfaisant 2–5, comme souhaité.

Soient $j \leq n+1$ un entier naturel avec $m_j \leq 2^{n+1}$ et $(s_1, \ldots, s_{m_j})$ un m_j-uple de suites binaires distinctes de longueur $n+1$. Le produit $P = \prod_{k=1}^{m_j} U_{s_k}$ est non vide et ouvert dans X^{m_j}. Vu que R_j est nulle part dense dans X^{m_j}, P n'est pas inclus dans l'adhérence de R_j, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert U inclus dans P qui est disjoint de R_j. Pour chaque k, il existe donc un ouvert non vide $U'_{s_k} \subseteq U_{s_k}$, de sorte que $\prod_{k=1}^{m_j} U'_{s_k}$ est inclus dans U, et ainsi disjoint de R_j. Si nous posons $U'_s = U_s$ lorsque s n'est pas l'un des s_k, alors nous obtenons une nouvelle collection d'ouverts non vides $\{U'_s \mid s \in \{0,1\}^{n+1}\}$ qui vérifient également les conditions 2–4 et en outre que $\prod_{k=1}^{m_j} U'_{s_k}$ et R_j sont disjoints. □

Par la suite nous utiliserons les notations suivantes. Pour w dans un groupe libre F_κ de rang κ, dont nous supposons donnée une base $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, et pour une famille $(g_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ d'éléments d'un groupe G, nous notons $w((g_\alpha)_{\alpha<\kappa})$ l'élément de G correspondant au mot obtenu en remplaçant chaque $x_\alpha^{\pm 1}$ par $g_\alpha^{\pm 1}$ dans l'expression de w comme mot réduit en $\{x_\alpha^{\pm 1} \mid \alpha < \kappa\}$.

Nous supposons connues les propriétés fondamentales de $SO_d(\mathbf{R})$ en tant que groupe de Lie, que nous rappelons ici brièvement. L'application $\varphi\colon SO_d(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^{d^2}$, qui transforme une rotation g en un d^2-uple de nombres réels dont la $((i-1)d+j)$-ième coordonnée est le coefficient (i,j) de la matrice de g relative à la base canonique de $\mathbf{R}^d$, permet d'identifier $SO_d(\mathbf{R})$ à une partie de $\mathbf{R}^{d^2}$, et cette identification fait de $SO_d(\mathbf{R})$ une variété réelle analytique et connexe (par arcs) de dimension d^2 ainsi qu'un espace métrique complet et sans points isolés. De plus, le produit et l'inversion dans $SO_d(\mathbf{R})$ deviennent dans $\mathbf{R}^{d^2}$ des fonctions polynomiale (pour l'inversion, cela découle du fait que les rotations sont orthogonales, c'est-à-dire que l'inverse de la matrice associée à une rotation est sa transposée), ce qui signifie que $SO_d(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie réel analytique. Par conséquent, si w est un élément de F_m, alors l'application $f_w\colon SO_d(\mathbf{R})^m \to SO_d(\mathbf{R})$ définie par $f_w(g_1, \ldots, g_m) = w(g_1, \ldots, g_m)$ est analytique. Nous noterons $p_i^j\colon SO_d(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ la projection qui à une rotation g associe la $((i-1)d+j)$-ième coordonnée de $\varphi(g)$. Remarquons que le déterminant $\det\colon SO_d(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est également une fonction analytique, car il devient dans $\mathbf{R}^{d^2}$ une fonction polynomiale.

Théorème 57. *Si $d \geq 3$, le groupe de rotations $SO_d(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe libre de rang $2^{\aleph_0}$ dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative.*

Preuve. L'idée est d'utiliser le théorème de Mycielski pour un ensemble dénombrable de relations bien choisies sur $SO_d(\mathbf{R})$ (qui est un espace métrique complet et sans points isolés), c'est-à-dire, avec les notations du théorème, telles que la condition qu'aucun m_j-uple d'éléments de $SO_d(\mathbf{R})$ n'appartienne à R_j implique que F est un groupe libre dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative.

Soient $m \geq 1$ un entier. Pour w un mot réduit non trivial de F_m, soit R_w l'ensemble des m-uples $(g_1, \ldots, g_m)$ d'éléments de $SO_d(\mathbf{R})$ tels que $w(g_1, \ldots, g_m)$ est l'élément neutre de $SO_d(\mathbf{R})$. Pour u et v deux mots réduits de F_m qui ne commutent pas, soit $R_{u,v}$ l'ensemble de m-uples $(g_1, \ldots, g_m)$ d'éléments de $SO_d(\mathbf{R})$ tels que $u(g_1, \ldots, g_m)$ et $v(g_1, \ldots, g_m)$ ont un point fixe en commun sur $\mathbf{S}^{d-1}$.

Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble dénombrable des R_w et $R_{u,v}$ pour tous les w, u et v comme ci-dessus et tous les entiers $m \geq 1$. Nous allons vérifier que toute relation m-aire de $\mathscr{R}$ est nulle part dense dans le produit $SO_d(\mathbf{R})^m$.

Pour w dans F_m non trivial, on considère l'application $\hat{w} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} (p_i^j \circ f_w - \delta_i^j)^2$. Cette application de $SO_d(\mathbf{R})^m$ dans $\mathbf{R}$ ne s'annule en $(g_1, \ldots, g_m)$ que si $w(g_1, \ldots, g_m)$ est l'élément neutre de $SO_d(\mathbf{R})$. L'ensemble R_w est donc la préimage de $\{0\}$ par l'application analytique $\hat{w}$. Ceci montre que R_w est fermé en tant que préimage d'un fermé par une application continue. D'autre part, le théorème 54 et la proposition 55 impliquent que $SO_d(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe libre de rang m, et donc R_w n'est pas égal à $SO_d(\mathbf{R})^m$ tout entier. Ainsi, l'intérieur de R_w est vide, car sinon la connexité de $SO_d(\mathbf{R})^m$ et le principe du prolongement analytique impliqueraient que $\hat{w}$ est identiquement nulle, c'est-à-dire que $R_w = SO_d(\mathbf{R})^m$. Par conséquent, l'intérieur de l'adhérence de R_w est vide, ce qui par définition signifie que R_w est nulle part dense dans $SO_d(\mathbf{R})^m$.

Soient u et v deux éléments de F_m qui ne commutent pas. Pour $(g_1, \ldots, g_m)$ dans $SO_d(\mathbf{R})^m$, considérons la matrice $M(g_1, \ldots, g_m)$ à $2d$ lignes et d colonnes dont le coefficient (k, l) est $(p_k^l \circ f_u)(g_1, \ldots, g_m) - \delta_k^l$ si $k \leq d$ et $(p_{k-d}^l \circ f_v)(g_1, \ldots, g_m) - \delta_{k-n}^l$ si $k \geq d+1$. Autrement dit, un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^d$ est un point fixe à la fois de $u(g_1, \ldots, g_m)$ et de $v(g_1, \ldots, g_m)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{2d} M(g_1, \ldots, g_m)_i^j x_j = 0$ pour tout j. Mais ce système d'équation a une solution non triviale si et seulement si les déterminants de toutes les sous-matrices de taille d de $M(g_1, \ldots, g_m)$ sont nuls. Soit donc q la fonction qui à tout m-uple $(g_1, \ldots, g_m)$ d'éléments de $SO_d(\mathbf{R})$ associe la somme des carrés des déterminants des $\binom{2d}{d}$ sous-matrices carrées de taille d de $M(g_1, \ldots, g_m)$. La fonction q est analytique, et $(g_1, \ldots, g_m)$ appartient à $R_{u,v}$ si et seulement si $q(g_1, \ldots, g_m) = 0$. En d'autres termes, $R_{u,v}$ est la préimage de $\{0\}$ par une fonction analytique. En utilisant le théorème 54, la connexité de $SO_d(\mathbf{R})^m$ et le principe du prolongement analytique, on découvre à nouveau que $R_{u,v}$ est nulle part dense dans $SO_d(\mathbf{R})^m$.

En appliquant le théorème de Mycielski, nous obtenons une partie F de $SO_d(\mathbf{R})$ de cardinal $2^{\aleph_0}$. Le choix des relations R_w et $R_{u,v}$ implique les propriétés suivantes de F. Aucun mot réduit en $F \cup F^{-1}$ n'est l'identité, ce qui signifie que le groupe engendré par F est un groupe libre sur F, de rang $2^{\aleph_0}$. De plus, deux mots réduits en $F \cup F^{-1}$ qui ne commutent pas n'ont aucun point fixe en commun sur $\mathbf{S}^{d-1}$, ce qui implique que l'action du groupe libre engendré par F sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative. □

Théorème 58. *Si $d \geq 3$ est pair, le groupe de rotations $SO_d(\mathbf{R})$ possède un sous-groupe libre de rang $2^{\aleph_0}$ qui agit librement sur $\mathbf{S}^{d-1}$.*

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème 57. Pour un mot w dans F_m, soit R_w l'ensemble des m-uples $(g_1, \ldots, g_m)$ d'éléments de $SO_d(\mathbf{R})$ tels que $w(g_1, \ldots, g_m)$ admet un point fixe sur $\mathbf{S}^{d-1}$. Notons $\mathscr{R}$ l'ensemble des relations R_w pour tout w dans F_m et tout $m \geq 1$. Il suffit de montrer que chaque relation m-aire dans $\mathscr{R}$ est nulle part dense dans $SO_d(\mathbf{R})^m$ pour en déduire, comme dans la preuve du théorème 57 et à l'aide du théorème 54, l'existence d'une partie F de $SO_d(\mathbf{R})$ qui engendre un groupe libre de rang $2^{\aleph_0}$ dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est libre. Pour cela, il suffit de constater que R_w est la préimage de $\{0\}$ par une fonction analytique, à savoir $(g_1, \ldots, g_m) \mapsto \det(w(g_1, \ldots, g_m) - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^d})$. □

Si H est un sous-groupe de $O_d(\mathbf{R})$, le groupe des isométries linéaires de $\mathbf{R}^d$, dont l'action sur $\mathbf{S}^{d-1}$ est localement commutative (resp. libre), alors H agit localement commutativement (resp. librement) sur toute partie de $\mathbf{R}^d$ qui est stable sous l'action de H et qui ne contient pas l'origine. En effet, le stabilisateur dans H d'un point x dans $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ est égal au stabilisateur de $x/\|x\|$. Les résultats que nous avons montré exclusivement pour $\mathbf{S}^{d-1}$ s'appliquent donc à de nombreux autres ensembles, en particulier à $\mathbf{B}^d \setminus \{0\}$ et à $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$.

Corollaire 59. *Soient $d \geq 3$ un entier et X l'un des ensembles $\mathbf{S}^{d-1}$, $\mathbf{B}^d \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. Pour tout cardinal κ avec $2 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$, X peut être partitionné en κ morceaux, chacun $SO_d(\mathbf{R})$-équidécomposable avec deux morceaux à X tout entier.*

Corollaire 60. *Soient $d \geq 3$ un entier et X l'un des ensembles $\mathbf{S}^{d-1}$, $\mathbf{B}^d \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. Pour tout cardinal λ avec $3 \leq \lambda \leq 2^{\aleph_0}$, X est $SO_d(\mathbf{R})$-divisible par λ.*

Notons que ce dernier résultat est même vrai pour $\lambda = 2$ si d est pair, car dans ce cas il existe un groupe de rotations isomorphe à F_1 qui agit *librement* sur la sphère, et le fait que le système de congruences associé à la divisibilité par 2 n'est pas faible n'est plus un obstacle.

3 Paradoxes dans le plan

3.1 La paradoxalité dénombrable de $\mathbf{S}^1$

Si les paradoxes de Hausdorff et de Banach–Tarski s'étendent à $\mathbf{R}^d$ pour $d \geq 4$, il est impossible d'obtenir des paradoxes identiques dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$. En effet, nous montrerons dans la section 4.5 qu'aucune partie bornée et d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^2$ n'est paradoxale.

Ces résultats peuvent toutefois se généraliser à $\mathbf{R}^2$, mais à condition de considérer des décompositions non plus finies mais dénombrables (voir section 1.1).

Proposition 61. *Le groupe $SO_2(\mathbf{R})$ est dénombrablement paradoxal.*

Preuve. Soit $H = \{\rho_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ le sous-groupe dénombrable de $SO_2(\mathbf{R})$ constitué des rotations dont l'angle est un multiple rationnel de 2π. Par l'axiome du choix, il existe un système de représentants des classes de G modulo H, notons-le X. L'ensemble $\{\rho_n(X) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est une partition stricte dénombrable de $SO_2(\mathbf{R})$. Considérons alors la décomposition $\{A, B\}$ de $SO_2(\mathbf{R})$ où $A = \{\rho_n(X) \mid n \text{ est pair}\}$ et $B = \{\rho_n(X) \mid n \text{ est impair}\}$. L'ensemble A est dénombrablement $SO_2(\mathbf{R})$-équidécomposable à $SO_2(\mathbf{R})$ tout entier, car $\rho_{n/2}\rho_n^{-1}$ envoie $\rho_n(X)$ sur $\rho_{n/2}(X)$ pour tout n pair, et $\{\rho_{n/2}(X) \mid n \text{ est pair}\} = \{\rho_n(X) \mid n \in \mathbf{N}\} = SO_2(\mathbf{R})$. Similairement, $B \sim^{\infty}_{SO_2(\mathbf{R})} SO_2(\mathbf{R})$, ce qui montre que $SO_2(\mathbf{R})$ est dénombrablement paradoxal. □

Il est clair que $SO_2(\mathbf{R})$ agit librement sur $\mathbf{S}^1$. Vu la seconde partie de la proposition 10 :

Corollaire 62. *Le cercle $\mathbf{S}^1$ est dénombrablement $SO_2(\mathbf{R})$-paradoxal.*

En étendant cette décomposition paradoxale par l'ajout des rayons et des demi-droites, on obtient également que $\mathbf{B}^2 \setminus \{0\}$ et $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ sont dénombrablement $SO_2(\mathbf{R})$-paradoxaux, et grâce à la proposition 43 :

Corollaire 63. *$\mathbf{B}^2$ et $\mathbf{R}^2$ sont dénombrablement paradoxaux.*

De la proposition 46, nous obtenons :

Corollaire 64. *Deux parties quelconques de $\mathbf{R}^2$ bornées et d'intérieurs non vides sont dénombrablement équidécomposables.*

3.2 Le paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz

Le paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz prouve l'existence de parties paradoxales de $\mathbf{R}^2$.

Lemme 65. *Le groupe $D_2(\mathbf{R})$ possède un sous-monoïde libre M de rang 2, engendré par a et b, tel que pour tous mots w_1 et w_2 de M commençant respectivement par a et b, $w_1(0) \neq w_2(0)$.*

Preuve. Nous identifions $\mathbf{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbf{C}$. Soit ϑ un nombre réel tel que $e^{i\vartheta}$ est transcendant (un tel nombre existe car l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbf{Q}$ est dénombrable, tandis que le cercle unité ne l'est pas) Définissons les déplacements a et b par $a(z) = z + e^{i\vartheta}$ et $b(z) = e^{i\vartheta}z$. Nous allons montrer que $w_1(0) \neq w_2(0)$ dès que w_1 et w_2 sont des mots réduits en a et b qui commencent par des lettres distinctes. Par le corollaire 15, ceci impliquera en particulier que le monoïde engendré par a et b est un monoïde libre de rang 2. Vu que $b(0) = 0$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que w_1 et w_2 se terminent par a. Écrivons $w_1 = a^{m_1}b^{m_2}\cdots a^{m_k}$ et $w_2 = b^{n_1}a^{n_2}\cdots a^{n_l}$ avec $k \geq 1$ impair et $l \geq 2$ pair, où chaque m_i, n_j est un entier strictement positif. Alors

$$\begin{aligned} w_1(0) &= m_1 + m_3u^{m_2} + m_5u^{m_2+m_4} + \cdots + m_ku^{m_2+m_4+\cdots+m_{k-1}} \\ \text{et } w_2(0) &= n_2u^{n_1} + n_4u^{n_1+n_3} + \cdots + n_lu^{n_1+n_3+\cdots+n_{l-1}}. \end{aligned}$$

Il est donc impossible que $w_1(0) - w_2(0) = 0$, car ceci impliquerait l'annulation d'une fonction polynomiale non nulle en u qui est transcendant. □

Le paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz découle alors immédiatement du corollaire 15.

Corollaire 66 (Paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz). *Il existe une partie non vide et paradoxale de* $\mathbf{R}^2$.

Comme nous l'avions mentionné alors, la preuve de la proposition 14 est tout à fait constructive, et l'on peut facilement exhiber de la construction ci-dessus un sous-ensemble paradoxal de $\mathbf{R}^2$, à savoir

$$A = \{a_0 + a_1 e^{i\vartheta} + a_2 e^{2i\vartheta} + \cdots + a_n e^{ni\vartheta} \mid n \in \mathbf{N} \text{ et } a_i \in \mathbf{N}\}.$$

En fait, on peut prendre $\vartheta = 1$, car e^i est transcendant (c'est un cas particulier du célèbre théorème d'Hermite–Lindemann). Il est possible de généraliser ce résultat.

Théorème 67. *Il existe une partie de* $D_2(\mathbf{R})$ *satisfaisant les hypothèses de la proposition 14 pour tout cardinal* κ *avec* $2 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Preuve. Nous identifions $\mathbf{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbf{C}$. Soit $A = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ une partie de $\mathbf{R}$ algébriquement indépendante sur $\mathbf{Q}$ de cardinalité κ (cf. page 25), indicée injectivement, et notons $\vartheta_\alpha = 2\arctan a_\alpha$ et $u_\alpha = e^{i\vartheta_\alpha}$. Nous commençons par montrer que $\{u_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ est une partie algébriquement indépendante sur $\mathbf{Q}$ de cardinalité κ.

Remarquons que $u_\alpha = (1 - a_\alpha^2 + 2ia_\alpha)/(1 + a_\alpha^2)$. Soit $p \in \mathbf{Q}[\kappa]$ un polynome non nul à coefficients rationnels avec κ indéterminées, et notons $\tilde{p}\colon \mathbf{C}^\kappa \to \mathbf{C}$ l'évaluation associée. Il existe deux polynomes $r \in \mathbf{Q}[i][\kappa]$ et $q \in \mathbf{Q}[\kappa]$ dont les évaluations associées $\tilde{r}\colon \mathbf{C}^\kappa \to \mathbf{C}$ et $\tilde{q}\colon \mathbf{C}^\kappa \to \mathbf{C}$ satisfont

$$\tilde{q}((x_\alpha)_{\alpha<\kappa}) > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{p}\left(\left(\frac{1 - x_\alpha^2 + 2ix_\alpha}{1 + x_\alpha^2}\right)_{\alpha<\kappa}\right) = \frac{\tilde{r}((x_\alpha)_{\alpha<\kappa})}{\tilde{q}((x_\alpha)_{\alpha<\kappa})}$$

pour tout $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ dans $\mathbf{C}^\kappa$ (une expression de r et de q s'obtient effectivement en mettant au même dénominateur l'expression formelle de $\tilde{p}$ en $((1 - x_\alpha^2 + 2ix_\alpha)/(1 + x_\alpha^2))_{\alpha<\kappa}$). Puisque i est algébrique sur $\mathbf{Q}$, A est aussi algébriquement indépendant sur $\mathbf{Q}[i]$. Par conséquent, $\tilde{r}((a_\alpha)_{\alpha<\kappa})$ est non nul, et par suite $\tilde{p}((u_\alpha)_{\alpha<\kappa})$ est non nul également.

Pour tout $\alpha < \kappa$, définissons le déplacement σ_α par $\sigma_\alpha(z) = u_\alpha z + u_\alpha$ si $\alpha \neq 0$ et $\sigma_0(z) = u_0 z$. Si w_1 et w_2 sont deux mots réduits en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ dont les premières lettres sont distinctes, le même raisonnement que dans la preuve du lemme 65 montre que $w_1(0) - w_2(0) = 0$ est équivalent à l'annulation d'une fonction polynomiale non triviale en $\{u_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, ce qui est impossible. Cela montre que $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ est une partie de $D_2(\mathbf{R})$ avec les propriétés voulues. □

Corollaire 68. *Pour tout cardinal* κ *avec* $2 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$, *il existe une partie non vide* A *de* $\mathbf{R}^2$ *qui admet* κ *sous-ensembles disjoints congruents à* A *tout entier.*

3.3 Le paradoxe de von Neumann dans le plan

Le paradoxe de von Neumann dans le plan est une généralisation au plan du théorème de Banach–Tarski dans l'espace : deux parties de $\mathbf{R}^2$ bornées et d'intérieurs non vides sont G-équidécomposables, pour un certain groupe G. Comme nous allons le voir dans la section 4.5, aucune partie de $\mathbf{R}^2$ bornée et d'intérieur non vide n'est $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$-paradoxale. Il est donc nécessaire d'agrandir le groupe considéré. Le caractère paradoxal sera tout de même préservé, car nous prendrons pour G un groupe de transformations préservant les aires (et l'orientation).

On note $SL_d(\mathbf{Z})$ le groupe des tranformations linéaires de $\mathbf{Z}^d$ de déterminant 1. Dans ce qui suit, $SL_d(\mathbf{Z})$ est vu comme un sous-groupe de $SL_d(\mathbf{R})$, c'est-à-dire comme agissant sur $\mathbf{R}^d$ tout entier.

Proposition 69. *Il existe deux éléments indépendants dans* $SL_2(\mathbf{Z})$.

Preuve. Soient u et v les éléments de $SL_2(\mathbf{Z})$ dont les matrices relatives à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont respectivement $U = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $V = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Nous allons montrer que tout mot réduit non trivial en U, V, U^{-1} et V^{-1} est différent de la matrice identité I. Ceci impliquera que le groupe engendré par u et v est un groupe libre de rang 2.

Soit donc W un mot réduit non trivial en U, V, U^{-1} et V^{-1}. Puisque VWV^{-1} et $V^{-1}WV$ ne sont égaux à I que si $W = I$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que W est de la forme $V^{m_1}U^{m_2}V^{m_3}\cdots V^{m_s}$, où les m_i sont des entiers non nuls et où $s \geq 3$ est un entier impair. Pour $2 \leq j \leq s$, soit $(x_j \quad y_j)$ la première ligne de la matrice $U^{m_2} \cdots X^{m_j}$ où X est U ou V suivant que j est pair ou impair. Notons que pour un entier k

$$U^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons montrer par récurrence que l'assertion suivante est valable pour $2 \leq j \leq s$: si j est pair, alors $|x_j| < |y_j|$, et si j est impair, alors $|x_j| > |y_j|$; le cas $j = 2$ est vérifié car $x_2 = 1$ et $y_2 = 2m_2$, avec m_2 non nul. Supposons que le résultat est vrai pour $j - 1$ ($j \geq 3$). Si j est pair, nous calculons $x_j = x_{j-1}$ et $y_j = 2m_j x_{j-1} + y_{j-1}$, et puisque $|x_{j-1}| > |y_{j-1}|$ par hypothèse de récurrence, nous obtenons $|x_j| < |y_j|$. Si j est impair, nous calculons $x_j = x_{j-1} + 2m_j x_{j-1}$ et $y_j = y_{j-1}$, et puisque $|x_{j-1}| < |y_{j-1}|$ par hypothèse de récurrence, nous obtenons $|x_j| > |y_j|$.

Ainsi, $|x_3| > |y_3| = |y_2| \geq 2$, d'où $x_3 \geq 3$, et si $j \geq 5$ est impair, alors $|x_j| > |y_j| = |y_{j-1}| > x_{j-1} = x_{j-2}$, d'où $|x_j| \geq |x_{j-2}| + 2$. Par récurrence, nous trouvons donc que $|x_j| \geq j$ pour tout j impair avec $3 \leq j \leq s$. En particulier, $x_s \geq s$. Puisque la première ligne de V^{m_1} est $(1 \quad 0)$, celle de W est $(x_s \quad y_s)$. Mais $s > 1$, donc $W \neq I$, ce qu'il fallait démontrer. □

Soit Q l'ensemble $[0, 1[\times [0, 1[$. Notons $SA_2(\mathbf{Z})$ le produit semi-direct $SL_2(\mathbf{Z}) \ltimes T_2(\mathbf{R})$ et $SA_2(\mathbf{Z})^\circ$ le groupe des $SA_2(\mathbf{Z})$-congruences par morceaux de Q vers Q (cf. corollaire 3). Pour x dans $\mathbf{R}^2$, notons $[x]$ la classe de x dans $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et notons x_Q l'unique élément de $[x] \cap Q$.

Lemme 70. *Soient x et y dans $\mathbf{R}^2$ et g dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Si $[x] = [y]$, alors $[g(x)] = [g(y)]$.*

Preuve. Il existe z dans $\mathbf{Z}^2$ tel que $x = y + z$, et alors $g(x) = g(y) + g(z)$ où $g(z)$ appartient à $\mathbf{Z}^2$, d'où $[g(x)] = [g(y)]$. □

Lemme 71. *L'application $\varphi\colon SL_2(\mathbf{Z}) \to SA_2(\mathbf{Z})^\circ$ définie pour x dans Q par $\varphi(g)(x) = g(x)_Q$ est un homomorphisme de groupes injectif.*

Preuve. Nous devons d'abord vérifier que φ est bien définie. Soit g dans $SL_2(\mathbf{Z})$ et montrons que $\varphi(g)$ appartient à $SA_2(\mathbf{Z})^\circ$. Le lemme 70 implique que $\varphi(g^{-1})$ est l'inverse de $\varphi(g)$, car $g^{-1}(g(x)_Q)_Q = g^{-1}(g(x))_Q = x$ et $g(g^{-1}(x)_Q)_Q = g(g(^{-1}x))_Q = x$, ce qui montre en particulier que $\varphi(g)$ est une bijection de Q dans Q. Soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ la décomposition de l'ensemble borné $g(Q)$ suivant le pavage de $\mathbf{R}^2$ par des copies de Q. Alors $\{g^{-1}(A_1), \ldots, g^{-1}(A_n)\}$ est une décomposition de Q vérifiant $\varphi(g)(a) = (\tau_i \circ g)(a)$ pour tout a dans $g^{-1}(A_i)$ et pour tout i, où τ_i est la translation du vecteur $z \in \mathbf{Z}^2$ pour lequel $A_i = g(Q) \cap (Q - z)$. Ainsi, $\varphi(g)$ est une $SA_2(\mathbf{Z})$-congruence par morceaux de Q vers Q.

Le lemme 70 implique également que φ est un homomorphisme de groupes. En effet, pour x dans Q et g et h dans $SL_2(\mathbf{Z})$, $\varphi(g \circ h)(x) = g(h(x))_Q = g(h(x)_Q)_Q = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)$.

Il reste à montrer que φ est injective. Supposons que $\varphi(g) = \mathrm{id}_Q$ pour un certain g dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Alors pour chaque x dans Q, $x - g(x)$ appartient à $\mathbf{Z}^2$. Cela force $x - g(x) = 0$ pour tout x dans Q. En effet, s'il existe x dans Q tel que $x - g(x) \neq 0$, alors il existe un entier $n \geq 2$ tel que $x/n - g(x/n) = (x - g(x))/n$ n'appartient pas à $\mathbf{Z}^2$. Ainsi, g est l'identité sur Q, donc sur $\mathbf{R}^2$, ce qui montre l'injectivité de φ. □

Théorème 72. *Si F est un sous-groupe libre de $SL_2(\mathbf{Z})$ de rang 2 et si G est le groupe engendré par F et $T_2(\mathbf{R})$, alors Q est G-paradoxal.*

Preuve. Soit $\hat{F}$ l'image de F par l'homomorphisme $\varphi\colon SL_2(\mathbf{Z}) \to SA_2(\mathbf{Z})^\circ$ du lemme 71 ; c'est un sous-groupe du groupe des G-congruences par morceaux de Q vers Q. Sachant que φ est injectif, $\hat{F}$ est un groupe libre engendré par $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$. Par la proposition 11, $\hat{F}$ agit librement sur $Q \setminus D$ où D est l'ensemble des points de Q fixés par un élément non trivial de $\hat{F}$, et par la proposition 10, $Q \setminus D$ est $\hat{F}$-paradoxal.

La relation de G-équidécomposabilité est plus fine que celle de $\hat{F}$-équidécomposabité sur les parties de Q. En effet, $\hat{F}$ est un sous-groupe du groupe des G-congruences par morceaux de Q vers Q, ce qui signifie que deux parties $\hat{F}$-congruentes de Q sont G-équidécomposables. Si A et B sont des parties $\hat{F}$-équidécomposables de Q, alors il existe des décompositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A et B telles que A_i et B_i sont $\hat{F}$-congruents pour tout i. Cela implique que A_i et B_i sont G-équidécomposables, et donc que A et B sont G-équidécomposables par le point 2 du théorème 4. Nous obtenons donc que $Q \setminus D$ est G-paradoxal. Pour conclure, il suffit de montrer que Q et $Q \setminus D$ sont $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposables (proposition 9).

Si f est dans l'image de φ, il existe une décomposition $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Q et $f_1, \dots, f_n$ dans $SA_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $f \restriction A_i = f_i$ pour tout i ; nous montrons maintenant que s'il existe i tel que A_i n'est pas inclus dans une droite et tel que f_i est l'identité sur A_i alors f est l'identité sur Q. Pour un tel i, si g est la préimage de f par φ, alors $g(A_i) = A_i + z$ pour un certain z dans $\mathbf{Z}^2$. Mais cela force $z = 0$ car g est linéaire, et vu que l'espace affine engendré par A_i est $\mathbf{R}^2$ tout entier, cela implique que g, et par suite f, est l'identité, comme annoncé. En général, les points fixes d'une transformation affine d'un espace vectoriel forment un sous-espace affine de cet espace vectoriel. Ainsi, si f est un élément non trivial de $\hat{F}$, alors les points fixes de f appartiennent à un nombre fini de sous-espaces affines propres de $\mathbf{R}^2$. Nous pouvons donc écrire $\bigcup \mathscr{S}(f)$ l'ensemble des points fixes de f, où $\mathscr{S}(f)$ est un ensemble fini dont les éléments sont des parties de droites. L'ensemble des points fixés par $\hat{F}$ est donc $\bigcup \mathscr{S}$ où $\mathscr{S} = \bigcup \{\mathscr{S}(f) \mid f \in \hat{F}\}$ et la dénombrabilité de $\hat{F}$ implique celle de $\mathscr{S}$. Écrivons donc $\mathscr{S} = \{S_0, S_1, S_2, \dots\}$. Pour chaque S_i dans $\mathscr{S}$, soit L_i une droite contenant S_i (elle est uniquement déterminée si S_i possède plus d'un point, sinon choisissons par exemple une droite verticale), et soit $D_i = Q \cap L_i$.

Si τ est une translation, notons $\hat{\tau}$ la G-congruence par morceaux de Q vers Q définie par $\hat{\tau}(x) = \tau(x)_Q$. Nous construisons maintenant une translation τ telle que $D \cap \hat{\tau}^n(D)$ est dénombrable pour tout entier n non nul. Il suffit que $D_i \cap \hat{\tau}^n(D_j)$ soit dénombrable pour tous i et j. Si D_i et D_j ne sont pas parallèles, alors $D_i \cap \hat{\tau}^n(D_j)$ est fini quel que soit la translation τ. Si D_i et D_j sont parallèles, alors soit T_{ij}^n l'ensemble des translations t telle que $D_i \subseteq t^n(L_j) + z$ pour un certain z dans $\mathbf{Z}^2$. L'ensemble T_{ij}^n est une réunion dénombrable de droites de $T_2(\mathbf{R})$, de même que $T = \bigcup \{T_{ij}^n \mid D_i \text{ et } D_j \text{ sont parallèles et } n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$, et par conséquent il existe une translation τ qui n'appartient pas à T. Cette translation a la propriété que $D_i \cap \hat{\tau}^n(D_j) = \varnothing$ si D_i et D_j sont parallèles. Ainsi, τ est une translation telle que $D \cap \hat{\tau}^n(D)$ est dénombrable pour tout entier n non nul.

L'ensemble $C = \bigcup \{D \cap \hat{\tau}^n(D) \mid n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ est un sous-ensemble dénombrable de D. Soit $B = \bigcup \{\hat{\tau}^n(D \setminus C) \mid n \in \mathbf{N}\}$. L'appartenance de y à $D \setminus C$ signifie que y n'appartient pas à $\hat{\tau}^n(D)$ quel que soit l'entier non nul n, et en particulier $C \cap B = \varnothing$ et $\hat{\tau}(B) = B \setminus (D \setminus C)$. Ainsi, $Q \setminus C = ((Q \setminus C) \setminus B) \cup B \sim_{T_2(\mathbf{R})} ((Q \setminus C) \setminus B) \cup (B \setminus (D \setminus C)) = Q \setminus D$.

Finalement, nous montrons que si C est un sous-ensemble dénombrable de Q, alors $Q \sim_{T_2(\mathbf{R})} Q \setminus C$, et ceci achèvera la démonstration. L'idée est essentiellement identique à celle de la proposition 11. Il s'agit de trouver un élément t de $T_2(\mathbf{R})$ qui peut être appliqué à C autant de fois que l'on veut sans jamais retomber dans C modulo $\mathbf{Z}^2$. Ceci est possible car l'ensemble des translations s pour lesquels il existe x et y dans C et n dans $\mathbf{N}$ avec $\hat{s}^n(x) = y$ est dénombrable (pour $n \in \mathbf{N}$, $x \in C$ et $y \in C$ fixés, il peut y avoir au plus $\mathrm{Card}(\mathbf{Z}^2)$ translations s vérifiant $\hat{s}^n(x) = y$), alors que $T_2(\mathbf{R})$ ne l'est pas. Ayant choisi un tel t, l'ensemble $E = \{\hat{t}^n(C) \mid n \in \mathbf{N}\}$, inclus dans Q, a la propriété que $\hat{t}(E) = E \setminus C$. Nous obtenons donc $Q = (Q \setminus E) \cup E \sim_{T_2(\mathbf{R})} (Q \setminus E) \cup (E \setminus C) = Q \setminus C$. □

En utilisant la proposition 46, nous obtenons :

Corollaire 73 (Paradoxe de von Neumann dans le plan). *Deux parties quelconques de $\mathbf{R}^2$ bornées et d'intérieurs non vides sont $SA_2(\mathbf{Z})$-équidécomposables.*

3.4 Le problème de la quadrature du cercle de Tarski

La quadrature du cercle dont il s'agit ici n'est bien sûr pas celle à la règle et au compas. Tarski a formulé en 1925 le problème suivant : un disque est-il équidécomposable à un carré ? Nous verrons dans la section 4.5 qu'il est nécessaire que deux parties mesurables de $\mathbf{R}^2$ aient la même aire pour être équidécomposables. Le problème de Tarski a été complètement résolu par Miklós Laczkovich en 1989 [10]. Nous citons ci-dessous son théorème principal.

Une application $c\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ est une *courbe simple fermée*, ou *courbe de Jordan*, si elle est continue, si $c \restriction [0,1[$ est injective et si $c(0) = c(1)$. Une partie D de $\mathbf{R}^2$ est un *domaine de Jordan* si elle est fermée et si ∂D est l'image d'une courbe simple fermée. Tout domaine de Jordan est mesurable au sens de Lebesgue. Un ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$ est une *subdivision* d'un intervalle $[a,b]$ si $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_0 < \cdots < x_n$.

***Théorème 74.** *Soit D un domaine de Jordan dans $\mathbf{R}^2$. Supposons qu'il existe une courbe simple fermée $c\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ telle que $\partial D = c([0,1])$ et une subdivision $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[0,1]$ telle que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $c_i = c \restriction [x_{i-1}, x_i]$ est deux fois différentiable et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. *$\|c_i''\| = 0$;*
2. *il existe $\delta > 0$ et $K > 0$ tels que $\delta \leq \|c_i''\| \leq K$.*

Si Q est un carré avec $\lambda(Q) = \lambda(D)$, alors Q et D sont $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposables.

En particulier, si D est un disque de centre a et de rayon r, la courbe $c\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ définie par $c(t) = a + (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$ vérifie toutes les conditions du théorème avec la subdivision triviale $\{0,1\}$. Par conséquent, si Q est un carré de même aire que D, alors Q et D sont $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposables. Très peu d'informations sur la régularité des morceaux utilisés dans cette décomposition sont connues. Laczkovich donne toutefois une estimation du nombre de morceaux nécessaire : il est inférieur à 10^{50}. Le théorème s'applique aussi à n'importe quel polygone, avec une subdivision à $p+1$ éléments où p est le nombre de côtés du polygone.

Nous montrons ici un résultat plus simple. Pour $\varepsilon \geq 0$, une application $f\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est dite *ε-homothétique* s'il existe un nombre réel $r > 0$ avec $1/(1+\varepsilon) \leq r \leq 1+\varepsilon$ et un déplacement g de $\mathbf{R}^d$ tels que $f = rg$. Nous dirons que deux parties A et B de $\mathbf{R}^d$ sont *ε-équidécomposables* s'il existe des décomposition $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A et B et des applications ε-homothétiques $f_1, \ldots, f_n$ telles que $f_i(A_i) = B_i$ pour tout i. C'est une relation réflexive et symétrique. L'ensemble A est *ε-subdécomposable* à B s'il est ε-équidécomposable à un sous-ensemble de B ; nous utiliserons les symboles relationnels $\sim_\varepsilon$ et $\precsim_\varepsilon$. Notons que ces deux relations vérifient les hypothèses du théorème 4. Le théorème de Laczkovich implique en particulier que le théorème suivant est vrai pour $\varepsilon = 0$.

Théorème 75. *Pour tout $\varepsilon > 0$, un disque est ε-équidécomposable à un carré de même aire.*

Preuve. Soient D un disque de rayon r, C un carré de côté $r\sqrt{\pi}$ et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Par le théorème 4, il suffit de montrer que D est ε-subdécomposable à C et réciproquement. Il existe un entier $n \geq 3$ tel qu'un n-gone P inscrit dans D contient le disque de rayon $1/(1+\varepsilon)$. Par le théorème 26, P est équidécomposable à un carré contenu dans C, ce qui montre que $D \precsim_\varepsilon C$. Réciproquement, il existe $n' \geq 3$ tel qu'un n'-gone circonscrit à D est inclus dans le disque de rayon $1+\varepsilon$, et en utilisant le théorème 26 nous obtenons $C \precsim_\varepsilon D$. $\square$

4 Mesures universelles invariantes et moyennabilité

4.1 Moyennabilité

Nous utiliserons la terminologie suivante. Soit X un ensemble, $\mathscr{A}$ une algèbre de parties de X et $\mathscr{A}'$ une σ-algèbre de parties de X. Une *mesure* sur $(X, \mathscr{A})$ est une fonction $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et si A et B sont des éléments disjoints de $\mathscr{A}$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (on dit que μ est *additive*). Une mesure sur $(X, \mathscr{A}')$ est dite *σ-additive* si, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{A}'$, $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.[3] Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$ et si A est un élément de $\mathscr{A}$, on dit que μ *normalise* A si $\mu(A) = 1$.

Par une *mesure universelle* sur un ensemble X nous désignerons une mesure sur $(X, \mathscr{P}(X))$. Par une *mesure G-invariante* sur un G-ensemble X muni d'une algèbre $\mathscr{A}$ nous désignerons une mesure μ sur $(X, \mathscr{A})$ telle que pour tout g dans G, si A et gA appartiennent à $\mathscr{A}$, alors $\mu(A) = \mu(gA)$.

La théorie des mesures universelles invariantes est étroitement liée à celle des décompositions paradoxales. De façon évidente, des résultats comme le paradoxe de Banach–Tarski ou la paradoxalité dénombrable de $\mathbf{S}^1$ ont des implications négatives sur l'existence de mesures universelles invariantes non triviales sur certains ensembles.

Soit X un G-ensemble. Une partie N de X est *G-négligeable* si pour toute mesure μ universelle et G-invariante sur X, $\mu(N) < \infty$ implique $\mu(N) = 0$. Si un groupe G est G-négligeable par multiplication à gauche, on dit simplement qu'il est *négligeable*.

Proposition 76. *Soient X un G-ensemble et N une partie de X. Si N est G-paradoxal, alors N est G-négligeable.*

Preuve. Soit μ une mesure universelle et G-invariante, vérifiant $\mu(N) < \infty$. Remarquons que deux sous-ensembles G-équidécomposables de X ont la même image par μ. Il existe $N' \subseteq N$ tel que $N \sim_G N'$ et $N \sim_G N \setminus N'$. Ainsi $\mu(N) = \mu(N') + \mu(N \setminus N') = \mu(N) + \mu(N) = 2\mu(N)$. Vu que $1 \neq 2$ et $\mu(N) < \infty$, on conclut que $\mu(N) = 0$. □

Soit X un G-ensemble. Une *G-mesure* sur X est une mesure universelle et G-invariante sur X normalisant X. On dit que X est *G-moyennable* s'il existe une G-mesure sur X ; cela revient à dire que X n'est pas G-négligeable. Lorsqu'un groupe G agit sur lui-même par multiplication à gauche, on parle alors simplement de *mesure* sur G et on dit que G est *moyennable*.

Soit X un G-ensemble. Si f est une application de domaine X, on définit pour chaque g dans G une nouvelle application, notée ${}_gf$, par ${}_gf(x) = f(g^{-1}x)$; si E est un ensemble d'applications qui est stable par cette opération, alors G agit à gauche sur E. Une mesure μ sur X définit une forme linéaire $d\mu$ sur l'espace vectoriel $L^\infty(X, \mathbf{R})$ des fonctions bornées à valeurs réelles sur X, à savoir l'intégrale. Les conditions supplémentaires sur la mesure μ impliquent les propriétés suivantes de cette intégrale : $\int \chi_X d\mu = 1$ et pour toute fonction bornée $f\colon X \to \mathbf{R}$ et tout g dans G, $\int {}_gf d\mu = \int f d\mu$. Une forme linéaire φ sur $L^\infty(X, \mathbf{R})$ s'appelle une *moyenne* si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\varphi(\chi_X) = 1$;
2. pour tout f dans $L^\infty(X, \mathbf{R})$, $f \geq 0$ implique $\varphi(f) \geq 0$.

Une moyenne φ sur $L^\infty(X, \mathbf{R})$ est *G-invariante* si de plus

3. pour tout f dans $L^\infty(X, \mathbf{R})$ et tout g dans G, $\varphi({}_gf) = \varphi(f)$.

L'existence d'une moyenne G-invariante sur $L^\infty(X, \mathbf{R})$ est équivalente à la G-moyennabilité de X. En effet, s'il existe une moyenne G-invariante φ sur $L^\infty(X, \mathbf{R})$, alors la fonction μ définie pour toute partie A de X par $\mu(A) = \varphi(\chi_A)$ est une G-mesure sur X.

Proposition 77. *Soit X un G-ensemble non vide. Si G est moyennable, alors X est G-moyennable.*

Preuve. Fixons un élément x de X. Soit μ une mesure à gauche sur G, et définissons la fonction $\nu\colon \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ par $\nu(A) = \mu(\{g \in G \mid gx \in A\})$. C'est une G-mesure sur X. □

3. Nous verrons dans la section 4.4 des généralisations de ces notions.

Nous avons remarqué au début de la section 1.1 que nous ne considèrerions que des actions de groupes *à gauche*. Ceci explique bien sûr pourquoi toutes les définitions de cette section concernent des opérations à gauche. Si nous voulons considérer des actions à droite, alors nous pouvons définir une *mesure à droite* et une *moyenne invariante à droite* sur un groupe, en considérant son action sur lui-même par multiplication à droite (nous laissons le soin au lecteur de formuler des définitions précises). Quelle est la relation entre la moyennabilité à gauche et la moyennabilité à droite d'un groupe ? En fait, ces deux notions coïncident, car si μ est une mesure à gauche sur un groupe G, alors il est immédiatement vérifié que la fonction μ' définie par $\mu'(A) = \mu(A^{-1})$ est une mesure à droite sur G. Le choix que nous avons fait de ne considérer que des actions à gauche est donc immatériel dans l'étude des groupes moyennables. [4] Nous montrons maintenant qu'il existe même des mesures (et par suite des moyennes invariantes) *des deux côtés.*

Proposition 78. *Soit G un groupe moyennable. Il existe une fonction $\nu\colon \mathscr{P}(G) \to [0,\infty]$ qui est à la fois une mesure à gauche et à droite sur G.*

Preuve. Supposons qu'il existe une mesure à gauche μ sur G. Notons μ' la mesure à droite qui lui est associée. Si A est une partie de G, nous définissons $f_A\colon G \to \mathbf{R}$ par $f_A(g) = \mu(Ag^{-1})$. Soit $\nu\colon \mathscr{P}(G) \to [0,\infty]$ la fonction définie par $\nu(A) = \int f_A d\mu'$. Il est clair que $\nu(\varnothing) = 0$. Si A et B sont des parties disjointes de G, alors $f_{A\cup B} = f_A + f_B$, ce qui implique que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. Ainsi, ν est une mesure sur $(G, \mathscr{P}(G))$, normalisant G car $f_G = \chi_G$. Soit h dans G. Vu que μ est G-invariante à gauche, $f_{hA} = f_A$, ce qui montre que ν est G-invariante à gauche. D'autre part, $f_{Ah}(g) = f_A(gh^{-1})$ pour tout g dans G, et sachant que μ' est G-invariante à droite, cela implique que $\nu(Ah) = \nu(A)$, c'est-à-dire que ν est G-invariante à droite. □

Nous passons maintenant en revue les propriétés élémentaires de stabilité de la classe des groupes moyennables.

Proposition 79. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Tout groupe fini est moyennable.*
2. *Tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable.*
3. *Tout quotient d'un groupe moyennable est moyennable.*
4. *Toute extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est moyennable.*
5. *Toute limite inductive filtrante de groupes moyennables est moyennable.*
6. *Tout produit fini de groupes moyennables est moyennable.*

Preuve. 1. Sur un groupe fini G, la mesure de comptage normalisée par $\mathrm{Card}(G)$ est G-invariante.

2. Soient G un groupe moyennable, μ une mesure sur G et H un sous-groupe de G. Soit T un système de représentant des classes de G modulo H. Montrons que la fonction $\nu\colon \mathscr{P}(H) \to [0,\infty]$ définie par $\nu(A) = \mu(\bigcup\{gA \mid g \in T\})$ est une mesure sur H. Il est clair que $\nu(\varnothing) = 0$. Si A et B sont des parties disjointes de H, gA et $g'B$ sont aussi disjoints pour tous g et g' dans T, et par conséquent $\nu(A \cup B) = \mu(\bigcup\{gA \cup gB \mid g \in T\}) = \mu(\bigcup\{gA \mid g \in T\}) + \mu(\bigcup\{gB \mid g \in T\}) = \nu(A) + \nu(B)$. Finalement, ν est H-invariante car, pour h dans H, $\nu(hA) = \mu(\bigcup\{ghA \mid g \in T\}) = \mu(ghg^{-1}\bigcup\{gA \mid g \in T\}) = \mu(\bigcup\{gA \mid g \in T\}) = \nu(A)$.

3. Soient G un groupe moyennable et H un sous-groupe distingué de G. Étant donné une mesure μ sur G, considérons la fonction $\nu\colon \mathscr{P}(G/H) \to [0,\infty]$ définie par $\nu(A) = \mu(\bigcup A)$. Il est évident que ν est une mesure sur $(G/H, \mathscr{P}(G/H))$, car si A et B sont disjoints, $\bigcup A$ et $\bigcup B$ le sont aussi. En outre, ν normalise G/H, car $\bigcup(G/H) = G$. Finalement, ν est G/H-invariante, car pour g dans G, $\nu((gH)A) = \mu(\bigcup((gH)A)) = \mu(g\bigcup A) = \mu(\bigcup A) = \nu(A)$.

4. Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G, μ une mesure sur H et ν une mesure sur G/H. Nous devons montrer que dans cette situation, G est moyennable. Notons $\pi\colon G \to G/H$ la projection canonique. Pour toute partie A de G, définissons une fonction $f_A\colon G \to \mathbf{R}$ par $f_A(g) = \mu(H \cap g^{-1}A)$. Si g_1 et g_2 sont équivalents modulo H, alors $g_2^{-1}g_1$ appartient à H et $f_A(g_2) = \mu(H \cap g_2^{-1}A) = \mu(H \cap g_2^{-1}g_1g_1^{-1}A) = \mu(g_2^{-1}g_1(H \cap g_1^{-1}A)) = \mu(H \cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1)$.

4. Ceci n'est toutefois pas le cas si l'on définit plus généralement la notion de moyennabilité pour un monoïde.

L'application f_A passe donc au quotient : il existe une application $\bar{f}_A\colon G/H \to \mathbf{R}$ telle que $f_A = \bar{f}_A \circ \pi$. Définissons $\xi\colon \mathscr{P}(G) \to [0,\infty]$ par $\xi(A) = \int \bar{f}_A d\nu$ et montrons que ξ est une mesure sur G. C'est une mesure sur $(G, \mathscr{P}(G))$, car $\bar{f}_\varnothing = 0$ et si A et B sont disjoints, $g^{-1}A$ et $g^{-1}B$ le sont aussi, d'où $\bar{f}_{A\cup B} = \bar{f}_A + \bar{f}_B$. En outre, ξ normalise G, car $\bar{f}_G = \chi_{G/H}$. Pour g dans G, $\bar{f}_{gA} = {}_{gH}(\bar{f}_A)$ et sachant que ν est G-invariante, cela implique $\xi(gA) = \xi(A)$, c'est-à-dire que ξ est G-invariante.

5. Quitte à remplacer les groupes moyennables en question par leurs images dans la limite inductive, qui sont moyennables en vertu de 3, on est ramené à la situation suivante. Soit G un groupe, I un ensemble et $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes moyennables de G filtrante pour l'inclusion et telle que $G = \bigcup\{G_i \mid i \in I\}$. Pour chaque i dans I, soit μ_i une mesure sur G_i, et soit $\mathscr{M}_i$ l'ensemble des mesures universelles et G_i-invariantes sur G normalisant G. Chaque $\mathscr{M}_i$ est non vide, car la fonction μ définie par $\mu(A) = \mu_i(A \cap G_i)$ appartient à $\mathscr{M}_i$.

Vérifions que chaque $\mathscr{M}_i$ est fermé dans l'espace produit produit $[0,\infty]^{\mathscr{P}(G)}$. Il suffit de montrer que le complémentaire de $\mathscr{M}_i$ est un voisinage de chacun de ses points. Soit donc ν dans $[0,\infty]^{\mathscr{P}(G)} \setminus \mathscr{M}_i$. L'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $\nu(\varnothing) \neq 0$;
2. il existe deux parties disjointes A et B de G telles que $\nu(A\cup B) \neq \nu(A) + \nu(B)$;
3. il existe une partie A de G et g dans G_i tels que $\nu(gA) \neq \nu(A)$.

Dans le cas 1 (resp. 2 ; 3), l'ensemble $\{\xi \in [0,1]^{\mathscr{P}(G)} \mid \xi(\varnothing) \neq 0\}$ (resp. $\{\xi \in [0,1]^{\mathscr{P}(G)} \mid \xi(A\cup B) \neq \xi(A) + \xi(B)\}$; $\{\xi \in [0,1]^{\mathscr{P}(G)} \mid \xi(A) \neq \xi(gA)\}$) est un ouvert contenant ν et disjoint de $\mathscr{M}_i$.

L'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}_i \mid i \in I\}$ a la propriété que toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{M}$ est non vide. En effet, pour i_1, …, i_n dans I, il existe j dans I tel que $G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_n} \subseteq G_j$, et alors $\mathscr{M}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathscr{M}_{i_n}$ contient $\mathscr{M}_j$ qui est non vide. Par compacité de $[0,\infty]^{\mathscr{P}(G)}$ (théorème de Tychonoff), il existe un élément μ dans $\bigcap \mathscr{M}$. La fonction μ est clairement une mesure sur G.

6. C'est une conséquence du point 4. □

Corollaire 80. *Un groupe est moyennable si et seulement si tous ses sous-groupes à génération finie sont moyennables.*

Preuve. Tout groupe est la limite inductive filtrante de ses sous-groupes à génération finie. □

Proposition 81. *Tout groupe abélien est moyennable.*

Preuve. Par le corollaire 80, il suffit de montrer que tout groupe abélien à génération finie est moyennable. Soit G un tel groupe et $\{g_1, \dots, g_m\}$ une partie génératrice finie de G. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, soit $\mathscr{M}_\varepsilon$ l'ensemble des mesures universelles μ sur G normalisant G et telles que $|\mu(S) - \mu(g_iS)| \leq \varepsilon$ pour toute partie S de G et pour tout i. Nous montrons maintenant que les $\mathscr{M}_\varepsilon$ ne sont pas vides. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \geq 2/\varepsilon$ un entier naturel. Pour toute partie S de G, posons $\mu_\varepsilon(S) = \mathrm{Card}(S^*)/n^m$ où

$$S^* = \bigl\{(r_1, \dots, r_m) \in \{1, \dots, n\}^m \mid g_1^{r_1} \cdots g_m^{r_m} \in S\bigr\}.$$

Alors $\mu_\varepsilon(G) = n^m/n^m = 1$ et si S et T sont disjoints, S^* et T^* le sont aussi et $(S\cup T)^* = S^* \cup T^*$, d'où $\mu_\varepsilon(S\cup T) = \mu_\varepsilon(S) + \mu_\varepsilon(T)$. Vu que G est abélien, un m-uple $(r_1, \dots, r_m)$ avec $r_i \neq n$, resp. $r_i \neq 1$, appartient à S^*, resp. à $(g_iS)^*$, si et seulement si $(r_1, \dots, r_i + 1, \dots, r_n)$, resp. $(r_1, \dots, r_i - 1, \dots, r_n)$, appartient à $(g_iS)^*$, resp. à S^*. Ainsi, seuls des m-uples $(r_1, \dots, r_m)$ avec $r_i = 1$ ou $r_i = n$, qui sont au nombre de $2n^{m-1}$, contribuent à la différence des cardinalités de S^* et $(g_iS)^*$, d'où $|\mu_\varepsilon(S) - \mu_\varepsilon(g_iS)| \leq 2n^{m-1}/n^m = 2/n \leq \varepsilon$, ce qui montre que μ_ε appartient à $\mathscr{M}_\varepsilon$.

Chaque $\mathscr{M}_\varepsilon$ est fermé dans le produit $[0,\infty]^{\mathscr{P}(G)}$ et l'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}_\varepsilon | \varepsilon > 0\}$ a la propriété des intersections finies non vides. En effet, si $I \subset]0,\infty[$ est fini et non vide, alors $\inf I$ appartient à $]0,\infty[$ et $\bigcap\{\mathscr{M}_\varepsilon \mid \varepsilon \in I\} = \mathscr{M}_{\inf I}$.

Par compacité de $[0,\infty]^{\mathscr{P}(G)}$, il existe une fonction μ dans $\bigcap \mathscr{M}$. Cette fonction est une mesure universelle sur G normalisant G et vérifiant $|\mu(S) - \mu(g_iS)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\mu(S) = \mu(g_iS)$, pour toute partie S de G et pour tout i. Un élément g dans G est un produit d'éléments de $\{g_1, \dots, g_m\}$, et par conséquent $\mu(S) = \mu(gS)$ pour toute partie S de G et pour tout g dans G, ce qui signifie que μ est une mesure sur G. □

Les propositions 79 et 81 montrent que tous les groupes élémentaires sont moyennables.

Corollaire 82. *Tout groupe résoluble est moyennable.*

Preuve. Soit G un groupe résoluble. Il existe une suite finie de groupes $G_0 = G \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\}$ telle que G_i est distingué dans G_{i-1} et G_{i-1}/G_i est abélien, pour $1 \leq i \leq n$. Ainsi, G est moyennable par le point 3 de la proposition 79 et la proposition 81. $\square$

4.2 Le théorème de Tarski

Dans la section 4.1 nous avons démontré qu'aucun groupe paradoxal n'est moyennable. Le théorème de Tarski affirme en particulier que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire que tout groupe non paradoxal est moyennable. Les classes des groupe paradoxaux et des groupes moyennables sont donc complémentaires dans la classe des groupes.

Dans un monoïde commutatif $\mathscr{T}$, noté additivement, on dit qu'un élément α est *borné* par rapport à un élément ε s'il existe un entier naturel n tel que $\alpha \leq n\varepsilon$.

Lemme 83. *Soient $\mathscr{T}$ un monoïde commutatif, noté additivement, et ε un élément de $\mathscr{T}$. Supposons que tout élément de $\mathscr{T}$ est borné par rapport à ε et que pour tout entier naturel n, $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$. Si $\mathscr{T}_0$ est une partie finie de $\mathscr{T}$ contenant ε, alors il existe une fonction $\mu\colon \mathscr{T}_0 \to [0,\infty]$ vérifiant*

1. *$\mu(\varepsilon) = 1$;*
2. *pour tous $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ dans $\mathscr{T}_0$, $\sum_{j=1}^n \zeta_j \leq \sum_{i=1}^m \eta_i$ implique $\sum_{j=1}^n \mu(\zeta_j) \leq \sum_{i=1}^m \mu(\eta_i)$.*

Preuve. Nous procédons par récurrence sur la cardinalité de $\mathscr{T}_0$. Si $\mathscr{T}_0 = \{\varepsilon\}$, alors la fonction μ définie par $\mu(\varepsilon) = 1$ satisfait les deux conditions. En effet, le deuxième condition se traduit dans ce cas par $n\varepsilon \leq m\varepsilon \Rightarrow n \leq m$, mais ceci est une conséquence immédiate de l'hypothèse.

Supposons maintenant que $\mathscr{T}_0$ est de cardinalité supérieure ou égale à 2 et soit α dans $\mathscr{T}_0 \setminus \{\varepsilon\}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une fonction $\nu\colon \mathscr{T}_0 \setminus \{\alpha\} \to [0,\infty]$ qui vérifie les conditions 1 et 2 de l'énoncé. Nous définissons une fonction $\mu\colon \mathscr{T}_0 \to [0,\infty]$ par $\mu(\beta) = \nu(\beta)$ si $\beta \neq \alpha$ et $\mu(\alpha) = \inf A$ où

$$A = \left\{ \frac{1}{r}\left(\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l) \right) \;\middle|\; p,q,r \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ \beta_1,\ldots,\beta_p,\gamma_1,\ldots,\gamma_q \in \mathscr{T}_0 \setminus \{\alpha\} \text{ et } r\alpha + \sum_{l=1}^q \gamma_l \leq \sum_{k=1}^p \beta_k \right\}.$$

Cette définition est légitime car ν ne prend que des valeurs finies et $\inf A$ appartient à $[0,\infty]$. En effet, pour tout β dans $\mathscr{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ il existe un entier naturel c tel que $\beta \leq c\varepsilon$, et les conditions 1 et 2 impliquent que $\nu(\beta) \leq c$. La condition 2 pour ν implique également que tous les éléments de A sont supérieurs ou égaux à 0.

La fonction μ satisfait $\mu(\varepsilon) = 1$. Il reste donc à prouver que μ satisfait la condition 2 du théorème. Soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ dans $\mathscr{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ et supposons que

$$s\alpha + \sum_{j=1}^n \zeta_j \leq t\alpha + \sum_{i=1}^m \eta_i \tag{4}$$

pour certains entiers naturels s et t. Si s et t sont nuls, la conclusion fait partie de l'hypothèse de récurrence.

Supposons $s = 0$ et $t > 0$. Nous devons montrer que $\sum_{j=1}^n \nu(\zeta_j) \leq t \inf A + \sum_{i=1}^m \nu(\eta_i)$, ce qui est équivalent à $\inf A \geq (\sum_{j=1}^n \nu(\zeta_j) - \sum_{i=1}^m \nu(\eta_i))/t$. Soit $a = (\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l))/r$ un élément quelconque de A, c'est-à-dire tel que

$$r\alpha + \sum_{l=1}^q \gamma_l \leq \sum_{k=1}^p \beta_k. \tag{5}$$

Des inégalités (4) et (5) nous obtenons

$$r\sum_{j=1}^{n}\zeta_j + t\sum_{l=1}^{q}\gamma_l \leq tr\alpha + r\sum_{i=1}^{m}\eta_i + t\sum_{l=1}^{q}\gamma_l \leq r\sum_{i=1}^{m}\eta_i + t\sum_{k=1}^{p}\beta_k.$$

Nous appliquons la condition 2 pour ν à cette inégalité :

$$r\sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j) + t\sum_{l=1}^{q}\nu(\gamma_l) \leq r\sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i) + t\sum_{k=1}^{p}\nu(\beta_k),$$

ce qui est équivalent à $a \geq (\sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j) - \sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i))/t$. Vu que a est quelconque, ceci implique que $\inf A \geq (\sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j) - \sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i))/t$.

Supposons finalement $s > 0$ et t quelconque. Nous devons montrer que $s\inf A + \sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j) \leq t\inf A + \sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i)$. Soit $a = (\sum_{k=1}^{p}\nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^{q}\nu(\gamma_l))/r$ un élément quelconque de A. Comme précédemment, des équations (4) et (5) nous obtenons

$$r\sum_{j=1}^{n}\zeta_j + t\sum_{l=1}^{q}\gamma_l + rs\alpha \leq tr\alpha + r\sum_{i=1}^{m}\eta_i + t\sum_{l=1}^{q}\gamma_l \leq r\sum_{i=1}^{m}\eta_i + t\sum_{k=1}^{p}\beta_k.$$

Cette inégalité signifie que

$$a' = \frac{1}{rs}\left(r\sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i) + t\sum_{k=1}^{p}\nu(\beta_k) - r\sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j) - t\sum_{l=1}^{q}\nu(\gamma_l)\right)$$

appartient à A, de sorte que $s\inf A + \sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j)$ est inférieur ou égal à $sa' + \sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j)$ qui est égal à $ta + \sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i)$. Vu que a est quelconque, ceci implique que $s\inf A + \sum_{j=1}^{n}\nu(\zeta_j) \leq t\inf A + \sum_{i=1}^{m}\nu(\eta_i)$. □

Lemme 84. *La conclusion du lemme 83 reste vraie si l'on ne suppose pas que tous les éléments de $\mathscr{T}$ sont bornés par rapport à ε.*

Preuve. Il est clair que l'ensemble des éléments de $\mathscr{T}$ bornés par rapport à ε—notons-le $\mathscr{T}^*$—est un sous-monoïde de $\mathscr{T}$. Si $\mathscr{T}_0$ est une partie finie de $\mathscr{T}$ contenant ε, alors en appliquant le lemme 83 à $\mathscr{T}^*\cap\mathscr{T}_0$, on obtient une fonction $\mu^*\colon \mathscr{T}^*\cap\mathscr{T}_0 \to [0,\infty]$ avec les propriétés souhaitées. Il suffit d'étendre μ^* en une fonction μ définie sur $\mathscr{T}_0$ en posant $\mu(\alpha) = \infty$ pour tout α dans $\mathscr{T}_0 \setminus \mathscr{T}^*$. □

Théorème 85. *Soient $\mathscr{T}$ un monoïde commutatif (noté additivement) et ε un élément de $\mathscr{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout entier naturel n, $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$.*
2. *Il existe un homomorphisme de monoïdes additifs $\mu\colon \mathscr{T} \to [0,\infty]$ tel que $\mu(\varepsilon) = 1$.*

Preuve. Supposons dans un premier temps la condition 1. Pour toute partie finie $\mathscr{T}_0$ de $\mathscr{T}$ contenant ε, soit $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ l'ensemble des fonctions $\mu\colon \mathscr{T} \to [0,\infty]$ telles que $\mu(\varepsilon) = 1$ et, si α, β et $\alpha+\beta$ appartiennent à $\mathscr{T}_0$, $\mu(\alpha+\beta) = \mu(\alpha)+\mu(\beta)$. Cet ensemble est non vide, car la fonction μ obtenue par le lemme 84 pour $\mathscr{T}_0$, étendue arbitrairement à $\mathscr{T}$, appartient à $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$; en effet, pour tous α et β dans $\mathscr{T}_0$, si $\alpha+\beta$ appartient à $\mathscr{T}_0$, $\alpha+\beta \leq \alpha+\beta$ implique par la condition 2 d'une part $\mu(\alpha+\beta) \leq \mu(\alpha)+\mu(\beta)$ et d'autre part $\mu(\alpha)+\mu(\beta) \leq \mu(\alpha+\beta)$, d'où l'additivité.

Vérifions que $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ est fermé dans l'espace produit $[0,\infty]^{\mathscr{T}}$. Il suffit de montrer que le complémentaire de $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ est un voisinage de tous ses éléments. Soit donc $f \in [0,\infty]^{\mathscr{T}} \setminus \mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$; ceci signifie que $f(\varepsilon) \neq 1$ ou que $f(\alpha+\beta) \neq f(\alpha)+f(\beta)$ pour certains α et β dans $\mathscr{T}_0$. Dans le premier cas, l'ensemble $\{g \in [0,\infty]^{\mathscr{T}} \mid g(\varepsilon) \neq 1\}$ est un ouvert contenant f et disjoint de $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$. Dans le second cas, l'ensemble $\{g \in [0,\infty]^{\mathscr{T}} \mid g(\alpha+\beta) \neq g(\alpha)+g(\beta)\}$ est un ouvert contenant f et disjoint de $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$.

L'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}(\mathscr{T}_0) \mid \mathscr{T}_0$ est une partie finie de $\mathscr{T}$ contenant $\varepsilon\}$ a la propriété des intersections finies non vides. En effet, si $\mathscr{T}_1$, ..., $\mathscr{T}_n$ sont des parties finies de $\mathscr{T}$ contenant ε, alors $\mathscr{M}(\mathscr{T}_1) \cap \cdots \cap \mathscr{M}(\mathscr{T}_n)$ contient $\mathscr{M}(\mathscr{T}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{T}_n)$ qui est non vide car $\mathscr{T}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{T}_n$ est fini.

Par compacité de $[0,\infty]^{\mathscr{T}}$, l'ensemble $\mathscr{M}$ a une intersection non vide. Soit μ un élément de $\bigcap \mathscr{M}$. Évidemment, $\mu(\varepsilon) = 1$. D'autre part, si α et β sont dans $\mathscr{T}$, alors la fonction μ appartient à $\mathscr{M}(\{\alpha, \beta, \alpha+\beta, \varepsilon\})$, et donc $\mu(\alpha+\beta) = \mu(\alpha)+\mu(\beta)$. Ceci montre que μ est un homomorphisme de monoïdes additifs.

Réciproquement, s'il existe un homomorphisme de monoïdes additifs $\mu\colon \mathscr{T} \to [0,\infty]$ avec $\mu(\varepsilon) = 1$, alors il ne peut exister α dans $\mathscr{T}$ tel que $(n+1)\varepsilon + \alpha = n\varepsilon$, car cela impliquerait $n+1 \leq n$. □

Corollaire 86 (Théorème de Tarski). *Soient X un G-ensemble. Une partie de X est G-négligeable si et seulement si elle est G-paradoxale.*

Preuve. La nécessité a déjà été démontrée (proposition 76). Supposons que C est une partie de X qui n'est pas G-paradoxale. Par le corollaire 39, le monoïde commutatif $\mathscr{T}_0(G, X)$ et l'élément $[C]$ vérifient la condition 1 du théorème 85. Ainsi, il existe un homomorphisme de monoïdes additifs $\mu\colon \mathscr{T}_0(G, X) \to [0,\infty]$ tel que $\mu([C]) = 1$. Cet homomorphisme induit une application $\hat{\mu}\colon \mathscr{P}(G) \to [0,\infty]$ définie par $\hat{\mu}(C) = \mu([C])$, telle que $\hat{\mu}(A \cup B) = \hat{\mu}(A) + \hat{\mu}(B)$ si A et B sont disjoints (voir le point 4 de la proposition 29), $\hat{\mu}(\varnothing) = 0$ et $\hat{\mu}(C) = 1$. C'est donc une mesure universelle sur X normalisant C et de plus G-invariante car définie sur les classes d'équidécomposabilité, ce qui signifie que C n'est pas G-négligeable. □

4.3 Supramoyennabilité et croissance d'un groupe

La notion de supramoyennabilité est une restriction naturelle de celle de moyennabilité. Un G-ensemble X est *G-supramoyennable* s'il est non vide et si pour toute partie non vide C de X il existe une mesure universelle et G-invariante sur X normalisant C ; cela revient à dire qu'aucune partie non vide de X n'est G-négligeable, ce qui par le théorème de Tarski est équivalent à ce qu'aucune partie non vide de X n'est G-paradoxale. La G-supramoyennabilité implique donc la G-moyennabilité. Si le groupe G agit sur lui-même par multiplication à gauche, on dit simplement que G est *supramoyennable* s'il est G-supramoyennable sous cette action. Nous allons voir que la supramoyennabilité est liée à la notion de croissance d'un groupe, que nous définissons formellement de la manière suivante.

Soit G un groupe et S une partie finie de G. La *croissance* de G relativement à S est l'application $\gamma_S\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ où $\gamma_S(n)$ est le nombre d'éléments de G qui sont des mots réduits en $S \cup S^{-1}$ de longueur au plus n.

Proposition 87. *Soit X un G-ensemble non vide. Si G est supramoyennable, alors X est G-supramoyennable.*

Preuve. Soit C une partie non vide de X et x un élément quelconque de C. Puisque G est supramoyennable, il existe une mesure universelle et G-invariante μ sur G normalisant l'ensemble non vide $C' = \{g \in G \mid gx \in C\}$. Définissons $\nu\colon \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ par $\nu(A) = \mu(\{g \in G \mid gx \in A\})$. C'est une mesure universelle et G-invariante sur X normalisant C. □

En particulier, le groupe des déplacements $D_n(\mathbf{R})$ n'est pas supramoyennable si $n \geq 3$ par le paradoxe de Banach–Tarski. Le paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz implique en outre que $D_2(\mathbf{R})$ n'est pas supramoyennable, ce qui montre en particulier, si l'on n'en était pas déjà convaincu, que la supramoyennabilité est une réelle restriction de la notion de moyennabilité.

La proposition suivante signifie essentiellement que les monoïdes libres non commutatifs sont à la supramoyennabilité ce que les groupes libres non abéliens sont à la moyennabilité (voir le paragraphe suivant la proposition 13), et explicite la raison de l'existence du paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz dans le plan.

Proposition 88. *Soit G un groupe. Si G possède un sous-monoïde libre non abélien, alors G n'est pas supramoyennable, i.e., G possède une partie non vide G-paradoxale.*

Preuve. Sachant que tout monoïde libre non abélien contient un sous-monoïde libre de rang 2, l'énoncé est un cas particulier de la proposition 14. En fait, si M est un sous-monoïde libre de rang 2 engendré par a et b, alors M est G-paradoxal car $aM \cap bM = \varnothing$, $a^{-1}aM = M$ et $b^{-1}bM = M$. □

La classe des groupes supramoyennables partage la plupart des propriétés de stabilité de la classe des groupes moyennables, avec l'exception notable des extensions de groupes : nous prouverons par la suite que tous les groupes abéliens sont supramoyennables, mais nous savons déjà que le groupe résoluble $D_2(\mathbf{R})$ n'est pas supramoyennable.

Proposition 89. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Tout groupe fini est supramoyennable.*
2. *Tout sous-groupe d'un groupe supramoyennable est supramoyennable.*
3. *Tout quotient d'un groupe supramoyennable est supramoyennable.*
4. *Toute limite inductive filtrante de groupes supramoyennables est supramoyennable.*
5. *Tout groupe possédant un sous-groupe supramoyennable d'indice fini est supramoyennable.*

Preuve. 1. Soient G un groupe fini et C une partie non vide de G. Il suffit de considérer la mesure de comptage normalisée par $\mathrm{Card}(C)$.

2. Si H est un sous-groupe de G et si C est une partie non vide de H, alors en particulier C est une partie de G, donc il existe une mesure universelle et G-invariante μ sur G qui normalise C. Le restriction $\mu \upharpoonright H$ est alors une mesure universelle et H-invariante sur H normalisant C.

3. Soient N un sous-groupe distingué d'un groupe G et C une partie non vide de G/N. Il existe une mesure universelle et G-invariante ν sur G normalisant $\bigcup C$. Pour toute partie A de G/N, posons $\mu(A) = \nu(\bigcup A)$. Il est clair que μ est une mesure G/N-invariante qui normalise C.

4. Soient G un groupe, I un ensemble et $(G_i)_{i\in I}$ un famille de sous-groupes supramoyennables de G, filtrante pour l'inclusion, tels que $G = \bigcup\{G_i \mid i \in I\}$. Soit C une partie non vide de G, et soit $\mathscr{M}_i$ l'ensemble des mesures universelles G_i-invariantes sur G normalisant C. L'ensemble $I' = \{i \in I | C \cap G_i \neq \varnothing\}$ est tel que $G = \bigcup\{G_i | i \in I'\}$. Pour chaque i dans I', il existe une mesure ν universelle et G_i-invariante sur G_i qui normalise $C \cap G_i$, et alors la fonction $\mu\colon \mathscr{P}(G) \to [0, \infty]$ définie par $\mu(A) = \nu(A \cap G_i)$ appartient à $\mathscr{M}_i$, ce qui montre que $\mathscr{M}_i$ n'est pas vide.

L'ensemble $\mathscr{M}_i$ est fermé dans le produit $[0, \infty]^{\mathscr{P}(G)}$ pour tout i dans I et l'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}_i \mid i \in I'\}$ a la propriété des intersections finies non vides. Par compacité de $[0, \infty]^{\mathscr{P}(G)}$ il existe μ dans $\bigcap \mathscr{M}$ qui est une mesure universelle et G-invariante sur G normalisant C.

5. Soient G un groupe, H un sous-groupe supramoyennable de G d'indice fini et C une partie non vide de G. Soit $\{g_1, \ldots, g_r\}$ un système de représentant des classes à droites de G modulo H. Considérons l'action de H sur G par multiplication à gauche. Par la proposition 87, G est H-supramoyennable. Il existe donc une mesure universelle et H-invariante ν sur G qui normalise $\bigcup\{g_iC \mid 1 \leq i \leq r\}$; en particulier $1 \leq \sum_{i=1}^r \nu(g_iC) < \infty$. Posons $x = \sum_{i=1}^r \nu(g_iC)$, et définissons l'application $\mu\colon \mathscr{P}(G) \to [0, \infty]$ par $\mu(A) = (1/x)\sum_{i=1}^r \nu(g_iA)$. Clairement μ est une mesure universelle sur G normalisant C. Il faut montrer que μ est G-invariante. Soit donc g dans G et A une partie de G. Il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, r\}$ et $h_1, \ldots, h_r$ dans H tels que $g_{\sigma(i)}g = h_ig_i$. Ainsi, $\mu(gA) = (1/x)\sum_{i=1}^r \nu(g_igA) = (1/x)\sum_{i=1}^r \nu(g_{\sigma(i)}gA) = (1/x)\sum_{i=1}^r \nu(h_ig_iA) = (1/x)\sum_{i=1}^r \nu(g_iA) = \mu(A)$, où l'on a utilisé la H-invariance de ν. □

Étudions maintenant quelques propriétés de la croissance d'un groupe. Soit G un groupe et S une partie finie de G. Il est évident que la fonction γ_S est croissante, et vu que l'élément neutre de G est l'unique mot réduit de longueur 0, $\gamma_S(0) = 1$. Si n et m sont des entiers naturels, tout mot réduit de longueur au plus $n + m$ est la concaténation d'un mot réduit de longueur au plus n et d'un mot réduit de longueur au plus m, d'où $\gamma_S(n+m) \leq \gamma_S(n)\gamma_S(m)$. En remarquant que l'ensemble des mots réduits en $S \cup S^{-1}$ de longueur au plus 1 est $\{1\} \cup S \cup S^{-1}$, cela nous donne une première propriété intéressante :

Proposition 90. *Soit G un groupe et S une partie finie de G. Pour tout entier naturel n, $\gamma_S(n) \leq c^n$, où c est la cardinalité de $\{1\} \cup S \cup S^{-1}$.*

Ce qui nous intéressera est l'amplitude de la fonction de croissance. Intuitivement, nous voyons que la croissance d'un groupe libre est « maximale », et qu'elle est d'autant plus faible que le nombre de relations affectant S est grand. Ceci nous permettra en fait de donner une condition suffisante à la supramoyennabilité.

On dit qu'un groupe G est *exponentiellement borné* si pour toute partie finie S de G et pour tout nombre réel $b > 1$ il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, $\gamma_S(n) < b^n$. Dans le cas contraire, on dit que G a une *croissance exponentielle*. Notons que G est exponentiellement borné si et seulement si $\gamma_S(n)^{1/n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Théorème 91. *Soit G un groupe exponentiellement borné. Si G agit sur un ensemble X, alors aucune partie non vide de X n'est G-paradoxale.*

Preuve. Raisonnons par contraposition. Supposons qu'il existe une partie G-paradoxale non vide C de X. Il existe alors deux sous-ensembles disjoint A et B de C et des G-congruences par morceaux f de C vers A et g de C vers B, associées à des décompositions $\{C_1, \ldots, C_n\}$ et $\{C'_1, \ldots, C'_m\}$ de C et des éléments g_1, …, g_n, g'_1, …, g'_m de G ; soit $S = \{g_1, \ldots, g_n, g'_1, \ldots, g'_m\}$. Nous montrons que pour tout entier $r \geq 1$, $\gamma_S(r) \geq 2^r$, ce qui implique que G a une croissance exponentielle. Soit $r \geq 1$ un entier. Considérons l'ensemble $H = \{h_1 \circ \cdots \circ h_r \mid h_k \in \{f, g\}\}$ de cardinalité 2^r. Si h et h' sont deux éléments distincts de H, alors $h(A) \cap h'(A) = \varnothing$ car les images de f et de g sont disjointes. Cela implique que pour x dans C, l'ensemble $\{h(x) \mid h \in H\}$ est de cardinalité 2^r. Mais chaque $h(x)$ s'écrit wx où w est un mot réduit en S, ce qui montre qu'il existe au moins 2^r éléments de G qui sont des mots réduits en $S \cup S^{-1}$. Ainsi, $\gamma_S(r) \geq 2^r$, ce qui est le résultat attendu. □

Contrairement au corollaire ci-après, le théorème 91 n'utilise pas l'axiome du choix.

Corollaire 92. *Pour qu'un groupe soit supramoyennable, il suffit qu'il soit exponentiellement borné.*

Preuve. Si G est un groupe exponentiellement borné, alors les parties non vides de G ne sont pas G-paradoxales par le théorème 91. Par le théorème de Tarski, ceci est équivalent à la supramoyennabilité de G. □

La classe des groupes exponentiellement bornés jouit de nombreuses propriétés de stabilité, dont les suivantes :

Proposition 93. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Tout groupe fini est exponentiellement borné.*
2. *Tout groupe abélien est exponentiellement borné.*
3. *Tout sous-groupe d'un groupe exponentiellement borné est exponentiellement borné.*
4. *Tout quotient d'un groupe exponentiellement borné est exponentiellement bornée.*
5. *Toute limite inductive filtrante de groupes exponentiellement bornés est exponentiellement bornée.*
6. *Tout groupe possédant un sous-groupe exponentiellement borné d'indice fini est exponentiellement borné.*

Preuve. 1. C'est évident.

2. Soit $S = \{g_1, \ldots, g_r\}$ une partie finie d'un groupe abélien G. Tout mot réduit en $S \cup S^{-1}$ de longueur au plus n s'écrit dans G $g_1^{m_1} \cdots g_r^{m_r}$ avec $-n \leq m_i \leq n$. Ceci montre que $\gamma_S(n) \leq (2n+1)^r$, et donc que G est exponentiellement borné.

3. C'est évident.

4. Soient G un groupe supramoyennable, $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes et S une partie finie de $f(G)$. Soit S' n'importe quelle partie finie de G telle que $f(S') = S$. Tout élément de $f(G)$ qui est un mot réduit en $S \cup S^{-1}$ de longueur au plus n est l'image d'un élément de G qui est un mot réduit en $S' \cup (S')^{-1}$ de longueur au plus n. Autrement dit, $\gamma_S(n) \leq \gamma_{S'}(n)$, ce qui montre que $f(G)$ est exponentiellement borné.

5. On raisonne par contraposition. Soit G un groupe à croissance exponentielle et $(G_i)_{i\in I}$ une famille filtrante de sous-groupes de G telle que $G = \bigcup\{G_i \mid i \in I\}$. Il existe une partie finie S de G et un nombre réel $b > 1$ tels que pour tout entier naturel N il existe un entier $n \geq N$ avec $\gamma_S(n) \geq b^n$. Chaque élément de S appartient à l'un des G_i, et comme S est fini et la famille $(G_i)_{i\in I}$ est filtrante, il existe j dans I tel que $S \subseteq G_j$, et alors G_j a une croissance exponentielle.

6. Soit G un groupe, H un sous-groupe exponentiellement borné de G d'indice fini et S une partie finie de G. Notons $\{g_1, \ldots, g_r\}$ un système de représentants des classes à droite de G modulo H où g_1 est l'élément neutre de G. Soit w un mot réduit en $S \cup S^{-1}$ de longueur au plus n. Écrivons $w = s_1 \cdots s_l$ dans G avec $l \leq n$ et $s_k \in S \cup S^{-1}$. Tous les produits $g_i s$ avec s dans S peuvent s'écrire $h(i,s)g_j$ pour un certain $h(i,s)$ dans H ; posons $S' = \{h(i,s) | 1 \leq i \leq r \text{ et } s \in S\}$. Alors $s_1 = g_1 s_1$ peut s'écrire $h_1 g_{i_1}$ pour un certain h_1 dans H et avec $1 \leq i_1 \leq r$. De même, $g_{i_1} s_2$ peut s'écrire $h_2 g_{i_2}$, de sorte que $s_1 s_2 = h_1 h_2 g_{i_2}$. Continuant ainsi, on peut écrire $w = h_1 \cdots h_l g_{i_l}$ où les h_k sont des éléments de H et où $1 \leq i_l \leq r$. Ceci montre que $\gamma_S(n) \leq r\gamma_{S'}(n)$. Mais S' est fini et H est exponentiellement borné, et ainsi G est aussi exponentiellement borné. □

Du point 2 de la proposition 93 et du corollaire 92, nous obtenons :

Corollaire 94. *Tout groupe abélien est supramoyennable.*

4.4 Théorèmes d'extensions

Nous donnons brièvement un exposé élémentaire de la théorie des algèbres booléennes, qui constitue le cadre naturel pour les théorèmes d'extensions de mesures que nous allons démontrer.

Soit $\mathscr{A}$ un ensemble non vide muni de deux opérations binaires, l'*union* et l'*intersection*, et d'une opération unaire, le *complément*. L'union de a et b est notée $a \vee b$, l'intersection de a et b est notée $a \wedge b$ et le complément de a est noté $\neg a$. L'ensemble $\mathscr{A}$, muni de ces trois opérations, est appelé une *algèbre booléenne* si les conditions suivante sont vérifiées pour tous a, b et c dans $\mathscr{A}$.

1. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ et $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (associativité) ;
2. $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$ (commutativité) ;
3. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ et $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (distributivité) ;
4. $a \vee (a \wedge b) = a$ et $a \wedge (a \vee b) = a$ (absorption) ;
5. $(a \wedge \neg a) \vee b = b$ et $(a \vee \neg a) \wedge b = b$ (complémentarité).

Il s'ensuit qu'il existe deux éléments $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ de $\mathscr{A}$, appelés le *zéro* et l'*unité*, tels que $a \wedge \neg a = \mathbf{0}$ et $a \vee \neg a = \mathbf{1}$ pour tout a dans $\mathscr{A}$. Le zéro et l'unité de $\mathscr{A}$ sont identiques si et seulement si $\mathscr{A}$ est réduit à un seul élément. Les propriétés suivantes sont en outre satisfaites, pour tous a et b dans $\mathscr{A}$.

6. $a \vee a = a$ et $a \wedge a = a$ (idempotence) ;
7. $a \vee \mathbf{0} = a$ et $a \wedge \mathbf{1} = a$ (éléments neutres) ;
8. $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (bornitude) ;
9. $\neg\mathbf{0} = \mathbf{1}$ et $\neg\mathbf{1} = \mathbf{0}$;
10. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ et $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ (lois de de Morgan) ;
11. $\neg(\neg a) = a$ (involution) ;
12. si $a \vee b = \mathbf{1}$ et $a \wedge b = \mathbf{0}$, alors $b = \neg a$.

Si A est une partie finie de $\mathscr{A}$, alors l'associativité et la commutativité nous permettent de définir $\bigvee A$ et $\bigwedge A$. Par convention, on pose $\bigvee \varnothing = \mathbf{0}$ et $\bigwedge \varnothing = \mathbf{1}$, et si A possède un unique élément a, on pose $\bigvee A = a$ et $\bigwedge A = a$. Deux éléments a et b sont dits *disjoints* si $a \wedge b = \mathbf{0}$. Si $a \vee b = b$, on dit que a est *inclus* dans b et on note $a \leq b$. On définit deux nouvelles opérations sur $\mathscr{A}$, appelées *différence* et *différence symétrique*, par $a \smallsetminus b = a \wedge \neg b$ et $a \mathbin{\triangle} b = (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$. En particulier, $(\mathscr{A}, \leq)$ est un treillis borné et distributif, et $(\mathscr{A}, \triangle, \wedge)$ est un anneau associatif, commutatif et unitaire.

Une partie $\mathscr{I}$ d'une algèbre booléenne $\mathscr{A}$ est un *idéal* de $\mathscr{A}$ si c'est un idéal du treillis $(\mathscr{A}, \leq)$, ou de manière équivalente si c'est un idéal de l'anneau $(\mathscr{A}, \triangle, \wedge)$. On définit sur l'ensemble quotient $\mathscr{A}/R$, où $R = \{(a,b) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} \mid a \triangle b \in \mathscr{I}\}$, les opérations suivantes : $[a] \vee [b] = [a \vee b]$, $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$ et $\neg[a] = [\neg a]$. Il est facilement vérifié que ces opérations sont bien définies et que $\mathscr{A}/R$, muni de ces opérations, est une algèbre booléenne, appelée *quotient* de l'algèbre booléenne $\mathscr{A}$ par l'idéal $\mathscr{I}$ et notée $\mathscr{A}/\mathscr{I}$. La structure d'anneau du quotient $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ coïncide avec celle du quotient de l'anneau $(\mathscr{A}, \triangle, \wedge)$ par l'idéal $\mathscr{I}$.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ des algèbres booléennes. Une application $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un *homomorphisme d'algèbres booléennes* si elle préserve les opérations d'union, d'intersection et de complément. Un homomorphisme d'algèbre booléenne préserve la structure de treillis et la structure d'anneau.

Une partie $\mathscr{C}$ d'une algèbre booléenne $\mathscr{A}$ est une *sous-algèbre* de $\mathscr{A}$ si elle est non vide et stable par les opérations d'union, d'intersection et de complément. Muni de la restriction de ces opérations, $\mathscr{C}$ est également une algèbre booléenne avec le même zéro et la même unité que $\mathscr{A}$. Si E est une partie de $\mathscr{A}$, l'intersection de toutes les sous-algèbres de $\mathscr{A}$ contenant E est appelée la sous-algèbre *engendrée* par E. Notons qu'une sous-algèbre engendrée par une partie finie est finie, et par conséquent qu'une algèbre booléenne est la réunion de ses sous-algèbres finies.

Pour un élément b dans une algèbre booléenne $\mathscr{A}$, on note $\mathscr{A}_b$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ inclus dans b. On définit sur $\mathscr{A}_b$ les opérations suivantes : $a_1 \vee_b a_2 = a_1 \vee a_2$, $a_1 \wedge_b a_2 = a_1 \wedge a_2$ et $\neg_b a = \neg a \wedge b$. Muni de ces opérations, $\mathscr{A}_b$ est une algèbre booléenne, appelée la *restriction* de $\mathscr{A}$ à b, dont le zéro est $\mathbf{0}$ et dont l'unité est b. La structure de treillis de $\mathscr{A}_b$ est induite par celle de $\mathscr{A}$. Un élément b de $\mathscr{A}$ est un *atome* s'il est minimal dans $(\mathscr{A} \setminus \{\mathbf{0}\}, \leq)$, ou de manière équivalente si $b \neq \mathbf{0}$ et $\mathscr{A}_b = \{\mathbf{0}, b\}$. Deux atomes sont évidemment soit égaux soit disjoints. Une algèbre booléenne $\mathscr{A}$ est *atomique* si pour tout a dans $\mathscr{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ il existe un atome a_0 inclus dans a.

Une partie $\mathscr{R}$ d'une algèbre booléenne $\mathscr{A}$ est un *sous-anneau* de $\mathscr{A}$ si c'est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{A}, \triangle, \wedge)$. Un sous-anneau est stable par les opérations d'union, d'intersection, de différence et de différence symétrique.

Une *mesure* (réelle positive) sur une algèbre booléenne $\mathscr{A}$ est une application $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\mathbf{0}) = 0$ et si $a \wedge b = \mathbf{0}$ alors $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$. Une mesure sur un sous-anneau $\mathscr{R}$ de $\mathscr{A}$ est définie identiquement.

Lemme 95. *Toute algèbre booléenne finie est atomique.*

Preuve. Il n'y a rien à démontrer pour une algèbre réduite à un seul élément. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre booléenne finie avec $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ et soit a un élément non zéro de $\mathscr{A}$. Si a n'est pas un atome, alors $\mathscr{A}_a \setminus \{\mathbf{0}, a\}$ est une partie non vide et finie de $\mathscr{A}$, qui possède donc un élément minimal a_0. Cet élément est un atome inclus dans a, car si b est inclus dans a_0, alors b est inclus dans a, donc $b = a_0$ ou $b = \mathbf{0}$ par minimalité de a_0. □

Lemme 96. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre booléenne finie et X l'ensemble des atomes de $\mathscr{A}$. Alors $\bigvee X = \mathbf{1}$.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $\bigvee X \neq \mathbf{1}$. Par le lemme 95, il existe un atome $a_0 \neq \mathbf{0}$ inclus dans $\neg \bigvee X$. Vu que a_0 appartient à X, $a_0 \leq \bigvee X$ par idempotence, d'où $\neg \bigvee X \leq \neg a_0$. Par transitivité, $a_0 \leq \neg a_0$, ce qui implique $a_0 = \mathbf{0}$. C'est une contradiction. □

Un élément a d'une algèbre booléenne finie $\mathscr{A}$ s'écrit, en tant qu'unité de l'algèbre restreinte $\mathscr{A}_a$, $a = \bigvee\{a_0 \leq a \mid a_0 \text{ est un atome de } \mathscr{A}\}$. Par conséquent, si une fonction m à valeurs dans $[0, \infty]$ est définie sur tous les atomes de $\mathscr{A}$, alors la fonction $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ définie par $\mu(a) = \sum_{b \in X(a)} m(b)$, où $X(a)$ est l'ensemble des atomes de $\mathscr{A}$ inclus dans a, est une mesure sur $\mathscr{A}$.

Proposition 97 (Théorème de représentation de Stone, cas fini). *Toute algèbre booléenne finie est isomorphe à l'algèbre booléenne des parties d'un ensemble fini.*

Preuve. Soient $\mathscr{A}$ une algèbre booléenne finie et X l'ensemble des atomes de $\mathscr{A}$. Définissons l'application $f\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{A}$ par $f(Y) = \bigvee Y$. Soient A et B des parties de X. Par idempotence $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$, c'est-à-dire $f(A \cup B) = f(A) \vee f(B)$. Si c et d sont des atomes de $\mathscr{A}$, alors $c \wedge d$ est égal à c si $c = d$ et $\mathbf{0}$ sinon, de sorte que $\{a \wedge b | a \in A \text{ et } b \in B\} = (A \cap B) \cup \{\mathbf{0}\}$; par conséquent $\bigvee((A \cap B) \cup \{\mathbf{0}\}) = \bigvee\{a \wedge b | a \in A \text{ et } b \in B\}$. Mais $\bigvee(A \cap B) = \bigvee((A \cap B) \cup \{\mathbf{0}\})$ par la propriété 7, et $\bigvee\{a \wedge b \mid a \in A \text{ et } b \in B\} = (\bigvee A) \wedge (\bigvee B)$ par distributivité, d'où $f(A \cap B) =$

$f(A) \wedge f(B)$. Vu que deux atomes distincts sont disjoints, $\bigvee A$ et $\bigvee(X \setminus A)$ sont également disjoints par distributivité et par idempotence, et par le lemme 96, $(\bigvee A) \vee (\bigvee(X \setminus A)) = \bigvee X = \mathbf{1}$. Ainsi, la propriété 12 nous assure que $\bigvee(X \setminus A) = \neg \bigvee A$, c'est-à-dire que $f(X \setminus A) = \neg f(A)$. Ceci montre que f est un homomorphisme d'algèbres booléennes.

Montrons que f injective. Soient A et B des parties distinctes de X (s'il en existe). Disons pour fixer les idées que $A \setminus B$ est non vide, et soit a_0 dans $A \setminus B$. Alors $a_0 \leq \bigvee A$ par idempotence, mais a_0 est disjoint de tous les éléments de B, et donc $a_0 \nleq \bigvee B$. Ceci montre que $f(A) \neq f(B)$.

Montrons finalement que f est surjective. Pour a dans $\mathscr{A}$, soit A l'ensemble de tous les atomes inclus dans A, c'est-à-dire l'ensemble des atomes de $\mathscr{A}_a$. Par le lemme 96, $\bigvee A$ est égal à l'unité de $\mathscr{A}_a$, qui est a. En d'autres termes, $f(A) = a$. □

Théorème 98. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre booléenne et $\mathscr{R}$ un sous-anneau de $\mathscr{A}$. Si μ est une mesure sur $\mathscr{R}$, alors il existe une mesure $\bar{\mu}$ sur $\mathscr{A}$ telle que $\bar{\mu} \restriction \mathscr{R} = \mu$.*

Preuve. Nous vérifions d'abord le théorème si $\mathscr{A}$ est fini, et nous procédons par récurrence sur le nombre d'atomes de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ ne possède aucun ou qu'un atome, alors $\mathscr{A} = \{\mathbf{0}\}$ ou $\mathscr{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, et le théorème est trivialement vérifié. Soit $n \geq 2$ un entier et supposons que le théorème est vérifié si $\mathscr{A}$ possède au plus $n-1$ atomes. Si $\mathscr{R} = \{\mathbf{0}\}$, on peut choisir $\bar{\mu} = 0$. Supposons que $\mathscr{R}$ possède au moins deux éléments, et soit b un élément minimal de la partie finie $\mathscr{R} \setminus \{0\}$. Considérons l'algèbre restreinte $\mathscr{A}_{\neg b}$. Il est clair que $\mathscr{R} \cap \mathscr{A}_{\neg b}$ est un sous-anneau de $\mathscr{A}_{\neg b}$, et que $\mu \restriction \mathscr{R} \cap \mathscr{A}_{\neg b}$ est une mesure sur ce sous-anneau. Les atomes de $\mathscr{A}_{\neg b}$ sont les atomes de $\mathscr{A}$ qui sont inclus dans $\neg b$. Par hypothèse de finitude, il existe un atome $a_0 \leq b$ dans $\mathscr{A}$. En particulier, a_0 n'est pas inclus dans $\neg b$, ce qui montre que $\mathscr{A}_{\neg b}$ a strictement moins d'atomes que $\mathscr{A}$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{A}_{\neg b}$, et nous obtenons ainsi une mesure ν sur $\mathscr{A}_{\neg b}$ qui est une extension de $\mu \restriction \mathscr{R} \cap \mathscr{A}_{\neg b}$.

Il suffit de définir $\bar{\mu}$ sur les atomes de $\mathscr{A}$. Si a est un atome de $\mathscr{A}$, posons $\bar{\mu}(a) = \nu(a)$ si a est inclus dans $\neg b$, $\bar{\mu}(a) = \mu(b)$ si $a = a_0$ et $\bar{\mu}(a) = 0$ sinon. Il reste à voir que $\bar{\mu}(a) = \mu(a)$ pour tous les éléments a dans $\mathscr{R}$. Soit c un élément de $\mathscr{R}$. Par la minimalité de b, $b \wedge c = \mathbf{0}$ ou $b \leq c$. Si $b \wedge c = \mathbf{0}$, alors c est inclus dans $\neg b$, et par conséquent $\bar{\mu}(c) = \nu(c) = \mu(c)$ car ν et μ coïncident sur $\mathscr{R} \cap \mathscr{A}_{\neg b}$. Si au contraire $b \leq c$, alors $\bar{\mu}(c) = \bar{\mu}(b) + \bar{\mu}(c \smallsetminus b) = \mu(b) + \nu(c \smallsetminus b) = \mu(b) + \mu(c \smallsetminus b) = \mu(c)$. Ceci montre que $\bar{\mu}$ est une extension de μ.

Supposons maintenant que $\mathscr{A}$ est infini. Pour chaque sous-algèbre finie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{A}$, notons $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ l'ensemble des fonctions $\nu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ telles que $\nu \restriction \mathscr{C}$ est une mesure sur $\mathscr{C}$ qui est une extension de $\mu \restriction \mathscr{C} \cap \mathscr{R}$. Les ensembles $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ sont non vides par la première partie de la preuve.

Vérifions que $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ est fermé dans l'espace produit $[0, \infty]^{\mathscr{A}}$. Il suffit de montrer que le complémentaire de $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ est un voisinage de tous ses points. Soit donc $\xi \in [0, \infty]^{\mathscr{A}} \setminus \mathscr{M}(\mathscr{C})$. Au moins l'une des trois assertions suivantes est vérifiée.

1. $\xi(\mathbf{0}) \neq 0$;
2. $\xi(a_1 \vee a_2) \neq \xi(a_1) + \xi(a_2)$ pour certains éléments disjoints a_1 et a_2 dans $\mathscr{C}$;
3. $\xi(a_0) \neq \mu(a_0)$ pour un certain a_0 dans $\mathscr{C} \cap \mathscr{R}$.

Si 1 (resp. 2 ; 3) est vérifié, alors $\{\pi \in [0, \infty]^{\mathscr{A}} \mid \pi(\mathbf{0}) \neq 0\}$ (resp. $\{\pi \in [0, \infty]^{\mathscr{A}} \mid \pi(a_1 \vee a_2) \neq \pi(a_1) + \pi(a_2)\}$; $\{\pi \in [0, \infty]^{\mathscr{A}} \mid \pi(a_0) \neq \mu(a_0)\}$) est un ouvert contenant ξ et disjoint de $\mathscr{M}(\mathscr{C})$.

L'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}(\mathscr{C}) \mid \mathscr{C}$ est une sous-algèbre finie de $\mathscr{A}\}$ a la propriété des intersections finies non vides. En effet, si $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ sont des sous-algèbres finies de $\mathscr{A}$, et si $\mathscr{D}$ désigne la sous-algèbre engendrée par $\mathscr{C}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{C}_n$, alors $\mathscr{D}$ est fini et $\mathscr{M}(\mathscr{C}_1) \cap \cdots \cap \mathscr{M}(\mathscr{C}_n)$ contient $\mathscr{M}(\mathscr{D})$ qui est non vide.

Par compacité de $[0, \infty]^{\mathscr{A}}$, il existe un élément $\bar{\mu}$ dans $\bigcap \mathscr{M}$. Alors $\bar{\mu}$ coïncide avec μ sur $\bigcup\{\mathscr{C} \cap \mathscr{R} \mid \mathscr{C}$ est une sous-algèbre finie de $\mathscr{A}\}$ qui est égal à $\mathscr{R}$. Si a_1 et a_2 sont des éléments disjoints de $\mathscr{A}$, alors $\bar{\mu}(a_1 \vee a_2) = \bar{\mu}(a_1) + \bar{\mu}(a_2)$, car $\bar{\mu}$ appartient à $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ est la sous-algèbre finie engendrée par $\{a_1, a_2\}$. Ainsi, $\bar{\mu}$ est une mesure sur $\mathscr{A}$ qui est une extension de μ. □

On dit qu'un groupe G *agit* sur une algèbre booléenne $\mathscr{A}$ s'il agit sur $\mathscr{A}$ en tant qu'ensemble et si l'application $a \mapsto ga$ est un automorphisme de $\mathscr{A}$ pour tout g dans G.

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre booléenne et G un groupe agissant sur $\mathscr{A}$. Une partie A de $\mathscr{A}$ est *G-invariante* si $gA \subseteq A$ pour tout g dans G. Une mesure μ sur un sous-anneau $\mathscr{R}$ de $\mathscr{A}$ est *G-invariante* si $\mu(ga) = \mu(a)$ pour tout a dans $\mathscr{R}$ et pour tout g dans G.

Un groupe G satisfait la *propriété d'extension invariante* si, chaque fois que G agit sur une algèbre booléenne $\mathscr{A}$, pour tout sous-anneau G-invariant $\mathscr{R}$ de $\mathscr{A}$ et pour toute mesure G-invariante μ sur $\mathscr{R}$ il existe une mesure G-invariante $\bar{\mu}$ sur $\mathscr{A}$ telle que $\bar{\mu} \restriction \mathscr{R} = \mu$.

Théorème 99. *Un groupe G vérifie la propriété d'extension invariante si et seulement s'il est moyennable.*

Preuve. Supposons que G possède la propriété d'extension invariante. L'ensemble $\mathscr{R} = \{\varnothing, G\}$ est un sous-anneau G-invariant de l'algèbre booléenne $\mathscr{P}(G)$, et la fonction $\mu\colon \mathscr{R} \to [0,\infty]$ définie par $\mu(\varnothing) = 0$ et $\mu(G) = 1$ est une mesure G-invariante sur $\mathscr{R}$. Il existe alors une mesure G-invariante $\bar{\mu}$ sur l'algèbre booléenne $\mathscr{P}(G)$ vérifiant $\bar{\mu}(G) = 1$.

Réciproquement, supposons que G est moyennable et que G agit sur une algèbre booléenne $\mathscr{A}$. Il existe une moyenne invariante φ sur $L^\infty(G, \mathbf{R})$. Soient $\mathscr{R}$ un sous-anneau G-invariant de $\mathscr{A}$ et μ une mesure G-invariante sur $\mathscr{R}$. Par le théorème 98, il existe une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathscr{A}$ telle que $\tilde{\mu} \restriction \mathscr{R} = \mu$. Pour a dans $\mathscr{A}$, soit $f_a\colon G \to [0,\infty]$ la fonction définie par $f_a(g) = \tilde{\mu}(g^{-1}a)$. Si f_a est bornée, posons $\bar{\mu}(a) = \varphi(f_a)$, sinon $\bar{\mu}(a) = \infty$. Il est clair que $\mu(\mathbf{0}) = 0$. Si a et b sont disjoints, alors $f_{a\vee b} = f_a + f_b$, et on en déduit que $\bar{\mu}(a \vee b) = \bar{\mu}(a) + \bar{\mu}(b)$. Ainsi, $\bar{\mu}$ est une mesure. C'est une extension de μ, car si a appartient à $\mathscr{R}$, alors f_a est constante, égale à $\mu(a)$, et par conséquent $\bar{\mu}(a) = \mu(a)$. Il reste à montrer que $\bar{\mu}$ est G-invariant. Soient h dans G et a dans $\mathscr{A}$. Remarquons que $f_{ha} = {}_h(f_a)$. En particulier, f_a est bornée si et seulement si f_{ha} est bornée, auquel cas $\varphi(f_a) = \varphi(f_{ha})$. $\square$

Proposition 100. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre booléenne, $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathscr{A}$, $\mathscr{R}$ un sous-anneau de $\mathscr{A}$, G un groupe agissant sur $\mathscr{A}$ et μ une mesure sur $\mathscr{R}$. Supposons que*

1. *$\mathscr{I}$ est G-invariant,*
2. *$\mathscr{R}$ est G-invariant,*
3. *μ est G-invariant,*
4. *$\mu \restriction \mathscr{R} \cap \mathscr{I} = 0$.*

Si G est moyennable, il existe une mesure G-invariante $\bar{\mu}$ sur $\mathscr{A}$ telle que $\bar{\mu} \restriction \mathscr{I} = 0$ et $\bar{\mu} \restriction \mathscr{R} = \mu$.

Preuve. Le groupe G agit sur l'algèbre booléenne quotient $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ de la façon suivante : $g[a] = [ga]$. Ceci est bien défini par la condition 1. Définissons $\nu\colon (\mathscr{R} \mathbin{\triangle} \mathscr{I})/\mathscr{I} \to [0,\infty]$ par $\nu([r]) = \mu(r)$; ceci est bien défini par la condition 4. Il est clair que ν est une mesure G-invariante sur le sous-anneau $(\mathscr{R} \mathbin{\triangle} \mathscr{I})/\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}/\mathscr{I}$. Par le théorème 99, il existe une mesure G-invariante $\bar{\nu}$ sur $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ telle que $\bar{\nu} \restriction (\mathscr{R} \mathbin{\triangle} \mathscr{I})/\mathscr{I} = \nu$. La fonction $\bar{\mu}\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ définie par $\bar{\mu}(a) = \bar{\nu}([a])$ est alors une mesure G-invariante sur $\mathscr{A}$ avec les propriétés souhaitées. $\square$

4.5 Applications

Proposition 101. *Soit $d \geq 1$ un entier. Si G est un groupe moyennable d'isométries de $\mathbf{R}^d$, alors il existe une mesure universelle et G-invariante sur $\mathbf{R}^d$ qui est une extension de la mesure de Lebesgue.*

Preuve. Le théorème 99 appliqué à la mesure de Lebesgue (qui est $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^d)$-invariante) donne le résultat. $\square$

Corollaire 102. *Soit $d \geq 1$ un entier. Si G est un groupe moyennable d'isométries de $\mathbf{R}^d$, alors aucune partie de $\mathbf{R}^d$ bornée et d'intérieur non vide n'est G-paradoxale.*

Preuve. Soit μ une mesure universelle et G-invariante sur $\mathbf{R}^d$ qui est une extension de la mesure de Lebesgue (proposition 101). Si A est une partie de $\mathbf{R}^d$ bornée et d'intérieur non vide, alors A contient une boule est est inclus dans une boule, d'où $0 < \mu(A) < \infty$. Cela démontre que A n'est pas G-négligeable, donc n'est pas G-paradoxal. $\square$

En particulier, aucune partie de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^2$) bornée et d'intérieur non vide n'est $\mathrm{Isom}(\mathbf{R})$-paradoxale (resp. $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$-paradoxale), car les groupes $\mathrm{Isom}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$ sont résolubles, donc moyennables, et dans ces deux cas il existe des mesures universelles et invariantes par isométries qui étendent la mesure de Lebesgue. Cependant, la version dénombrable du théorème de Banach–Tarski dans $\mathbf{R}^2$ (voir section 3.1) implique qu'il n'existe aucune mesure universelle et $D_2(\mathbf{R})$-invariante sur $\mathbf{R}^2$ qui est en outre σ-additive.

Pour $\mathbf{R}$, un résultat encore plus fort découle de l'étude de la supramoyennabilité :

Proposition 103. *Aucune partie non vide de* $\mathbf{R}$ *n'est* $\mathrm{Isom}(\mathbf{R})$*-paradoxale.*

Preuve. Le groupe $T_1(\mathbf{R})$ des translations de la droite réelle est distingué et d'indice fini dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{R})$ (car $O_1(\mathbf{R})$ est cyclique d'ordre 2), et puisqu'il est abélien, il s'ensuit des point 2 et 6 de la proposition 93 que $\mathrm{Isom}(\mathbf{R})$ est exponentiellement borné. Par le théorème 91, aucune partie non vide de $\mathbf{R}$ n'est $\mathrm{Isom}(\mathbf{R})$-paradoxale. □

Proposition 104. *Soit $d \geq 1$ un entier. Si G est un groupe moyennable d'isométries de $\mathbf{R}^d$, alors il existe une mesure universelle et G-invariante sur $\mathbf{R}^d$ qui normalise le cube unité et qui est nulle sur l'idéal $\mathscr{N}$ des ensembles nulle part denses.*

Preuve. Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^d$ bornées et mesurables au sens de Jordan, et soit v la mesure de Jordan sur $\mathscr{J}$ (voir appendice B). La mesure v est nulle sur $\mathscr{J} \cap \mathscr{N}$, $\mathscr{J}$ et $\mathscr{N}$ sont stables sous l'action d'isométries et v est $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^d)$-invariante. Nous pouvons donc appliquer la proposition 100 pour obtenir une mesure universelle et G-invariante sur $\mathbf{R}^d$ qui est une extension de la mesure de Jordan (donc qui normalise le cube unité) et qui est nulle sur $\mathscr{N}$. □

Appendices

A Équidécomposabilité continue

Dans cet appendice d est un entier supérieur ou égal à 2.

Les résultats de cet appendice sont tirés de l'article de T. M. Wilson [24]. Le mathématicien J. de Groot a formulé le problème suivant : est-il possible de réaliser la duplication de la boule $\mathbf{B}^3$ en déplaçant les morceaux continûment dans l'espace, sans qu'ils ne se superposent ? Nous considérons le problème dans un cadre plus général.

Soit G un groupe topologique, X un G-ensemble et A et B des parties de X. On dit que A est *continûment G-équidécomposable* à B s'il existe un entier naturel n, des décompositions respectives $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A et B et des applications continues $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de $[0,1]$ dans G (ou *chemins* dans G) vérifiant :

1. $\gamma_i(0)$ est l'élément neutre de G pour tout i ;
2. $\gamma_i(1)A_i = B_i$ pour tout i ;
3. $\gamma_i(t)A_i \cap \gamma_j(t)A_j = \varnothing$ pour tout t dans $[0,1]$ et tous $i \neq j$.

Nous utiliserons les symboles relationnels $\approx_G$ et $\precapprox_G$ pour les relations de G-équidécomposabilité continue et de G-subdécomposabilité continue sur $\mathscr{P}(X)$. La condition 2 de la définition montre que $A \approx_G B$ implique $A \sim_G B$. Nous allons montrer que dans $\mathbf{R}^d$ et avec certaines restrictions, l'implication réciproque est également vraie (théorème 111).

Proposition 105. *Soient G un groupe topologique et X un G-ensemble. La G-équidécomposabilité continue définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(X)$.*

Preuve. Soient A, B et C des parties de X. L'application $\gamma\colon [0,1] \to G$ définie par $\gamma(t) = 1$ est continue et $\gamma(1)A = A$, ce qui montre que $A \approx_G A$. Supposons que $A \approx_G B$. Il existe des décompositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A et B et des applications continues $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de $[0,1]$ dans G vérifiant les conditions 1, 2 et 3 ci-dessus. Alors les application $\tilde{\gamma}_i\colon [0,1] \to G$ définies par $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i(1-t)\gamma_i(1)^{-1}$ sont continues et telles que $\tilde{\gamma}_i(0) = 1$, $\tilde{\gamma}_i(1)B_i = A_i$ et $\tilde{\gamma}_i(t)B_i \cap \tilde{\gamma}_j(t)B_j = \varnothing$ pour tous i, j et t, c'est-à-dire $B \approx_G A$. Finalement, supposons en outre que $B \approx_G C$. Il existe des décompositions $\{B'_1, \ldots, B'_m\}$ et $\{C'_1, \ldots, C'_m\}$ de B et C et des applications continues $\delta_1, \ldots, \delta_m$ de $[0,1]$ dans G vérifiant les conditions 1, 2 et 3 ci-dessus. On vérifie alors que les décompositions

$$\{A_i \cap \gamma_i(1)^{-1}B'_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} \setminus \{\varnothing\} \quad \text{et} \quad \{C'_j \cap \delta_j(1)B_i \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} \setminus \{\varnothing\}$$

et les applications continues $\gamma_i * (r_{\gamma_i(1)} \circ \delta_j)$, où $*$ dénote la concaténation de chemins et r_g la multiplication à droite par g, font que $A \approx_G C$. $\square$

Soit T le groupe des translations de $\mathbf{R}^d$ dont les vecteurs appartiennent à $\mathbf{R}^2 \times \{0\}^{d-2}$. Notons $p_1\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ la projection sur la première coordonnée. Nous fixons dans la suite un groupe G de transformations affines de $\mathbf{R}^d$ tel que $T \subseteq G$.

Nous définissons un monoïde de types de G-équidécomposabilité continue comme suit. Pour deux parties bornées A et B de $\mathbf{R}^d$, notons (A) et (B) leurs classes de G-équidécomposabilité continue, et posons $(A) + (B) = (A \cup \tau(B))$ où τ est un élément de T tel que $p_1(\tau(b)) - p_1(a) > 0$ pour tous a dans A et b dans B. Nous devons bien sûr vérifier que cette définition a un sens. Supposons que $A \approx_G A'$, $B \approx_G B'$ et que τ et τ' sont des éléments de T comme dans la définition. Il existe des décompositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{A'_1, \ldots, A'_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_m\}$ et $\{B'_1, \ldots, B'_m\}$ de A, A', B et B' respectivement et des applications continues $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \delta_1, \ldots, \delta_m$ de $[0,1]$ vers G vérifiant les points 1, 2 et 3 de la définition de G-équidécomposabilité continue. Puisque l'intervalle $[0,1]$ est compact, ses images par les γ_i, δ_j sont des compacts de G, et sachant que les A_i, B_j sont bornés, il s'ensuit que les ensembles $\bigcup\{\gamma_i([0,1])(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$ et $\bigcup\{\delta_j([0,1])(B_j) \mid 1 \le j \le m\}$ sont bornés. Par conséquent, il existe σ dans T tel que $p_1((\sigma \circ \delta_j(t))(b)) - p_1(\gamma_i(t)(a)) > 0$ pour tous a dans A_i, b dans B_j et pour tous i, j et t. On considère les décompositions $\{A_i | 1 \le i \le n\} \cup \{\tau(B_j) | 1 \le j \le m\}$ et $\{A'_i | 1 \le i \le n\} \cup \{\sigma(B'_j) | 1 \le j \le m\}$ de $A \cup \tau(B)$ et $A' \cup \sigma(B')$ et les $n + m$ applications $\zeta_i, \eta_j\colon [0,1] \to G$ définies par

$\zeta_i(t) = \gamma_i(t)$, $\eta_j(t) = \sigma \circ \delta_j(t) \circ \tau^{-1}$. Il est facile de vérifier qu'alors $A \cup \tau(B) \approx_G A' \cup \sigma(B')$. Mais il est évident d'autre part que $A \cup \sigma(B') \approx_G A \cup \tau'(B')$, et par transitivité nous obtenons que $A \cup \tau(B) \approx_G A' \cup \tau'(B')$, ce qui est le résultat attendu.

Proposition 106. *L'ensemble des classes de G-équidécomposabilité continue des parties bornées de $\mathbf{R}^d$, muni de la loi + définie ci-dessus, est un monoïde commutatif.*

Preuve. Le type $(\varnothing)$ est un élément neutre pour +. L'associativité est immédiate. Soient A et B des parties bornées de $\mathbf{R}^d$, et soit τ la translation de vecteur $(r, 0 \ldots, 0)$ où $r > \operatorname{diam}(A \cup B)$. Alors $(A) + (B) = (A \cup \tau(B))$ et $(B) + (A) = (B \cup \tau(A)) = (A \cup \tau^{-1}(B))$. Soit $\gamma_1 : [0,1] \to G$ l'application constante en $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$ et pour t dans $[0,1]$ soit $\gamma_2(t)$ la translation de vecteur $r(\cos(\pi t) - 1, \sin(\pi t), 0, \ldots, 0)$. Alors les décompositions $\{A, \tau(B)\}$, $\{A, \tau^{-1}(B)\}$ et les chemins γ_1, γ_2 font que $A \cup \tau(B) \approx_G A \cup \tau^{-1}(B)$, c'est-à-dire $(A) + (B) = (B) + (A)$. □

Un ensemble fini non vide $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de parties de $\mathbf{R}^d$ (indicé injectivement) est dit G-*extricable* si $(A_1) + \cdots + (A_n) = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. Notons $\mathscr{Q}_G$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^d$ dont toute paire de sous-ensembles disjoints est G-extricable.

Lemme 107. *Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un ensemble fini, non vide et G-extricable de parties de $\mathbf{R}^d$ (indicé injectivement) et si chaque A_i appartient à $\mathscr{Q}_G$, alors $\bigcup\{A_i \mid 1 \le i \le n\}$ appartient à $\mathscr{Q}_G$.*

Preuve. Soient B_1 et B_2 deux parties disjointes de $\bigcup\{A_i \mid 1 \le i \le n\}$. En utilisant les deux hypothèses, on obtient

$$\begin{aligned}
&(B_1 \cup B_2)\\
=&\textstyle\sum_{i=1}^n (\bigcup\{A_i \cap B_j \mid 1 \le j \le 2\})\\
=&\textstyle\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n (A_i \cap B_j)\\
=&\textstyle\sum_{j=1}^2 (\bigcup\{A_i \cap B_j \mid 1 \le i \le n\})\\
=&(B_1) + (B_2),
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\{B_1, B_2\}$ est G-extricable. □

Si S est une partie de $\mathbf{R}$, on notera par la suite $\Delta S = \{s - s' \mid s \in S \text{ et } s' \in S\}$.

Lemme 108. *Il existe une partition $\{S_1, S_2\}$ de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{R} \setminus \Delta S_1$ et $\mathbf{R} \setminus \Delta S_2$ sont denses dans $\mathbf{R}$.*

Preuve. Posons $K = \bigcup\{(1/3^n)\mathbf{Z} | n \in \mathbf{N}\}$ et $H = K \cup (K + 1/2)$. Montrons que $K \cap (K + 1/2) = \varnothing$. Soit x un élément de $K + 1/2$, que l'on peut écrire $x = z/3^n + 1/2$ pour certains z dans $\mathbf{Z}$ et n dans $\mathbf{N}$. Alors $x = (2z + 3^n)/(2 \cdot 3^n)$, et vu que $2z + 3^n$ n'est pas un multiple de 2, x n'appartient pas à K.

Nous montrons maintenant que H est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. Il est clair que si h appartient à H, alors $-h$ également. Si $k_1 = z_1/3^{n_1}$ et $k_2 = z_2/3^{n_2}$ sont dans K, alors $k_1 + k_2$ également car

$$k_1 + k_2 = \frac{3^{n_2} z_1 + 3^{n_1} z_2}{3^{n_1 + n_2}}.$$

En remarquant que $1 \in K$, la stabilité additive de H découle de celle de K.

Par l'axiome du choix, il existe un système de représentants du quotient $\mathbf{R}/H$; soit T un tel ensemble. Posons $S_1 = \{t + k \mid t \in T \text{ et } k \in K\}$ et $S_2 = S_1 + 1/2$. Alors $S_1 \cup S_2 = \{t + k \mid t \in T \text{ et } k \in K\} \cup \{t + k + 1/2 \mid t \in T \text{ et } k \in K\} = \{t + h \mid t \in T \text{ et } h \in H\} = \mathbf{R}$. Pour x dans $S_1 \cap S_2$, nous pouvons écrire $x = t + k + 1/2 = t' + k'$ avec t, t' dans T et k, k' dans K, ce qui implique $t - t' \in H$ d'où $t = t'$; cela implique $k + 1/2 = k'$ ce qui est impossible cas $K \cap (K + 1/2) = \varnothing$. Ceci montre que $\{S_1, S_2\}$ est une partition de $\mathbf{R}$. Il est clair que $\Delta S_1 = \Delta S_2$, et nous montrons maintenant que $\mathbf{R} \setminus \Delta S_1$ est dense dans $\mathbf{R}$. Supposons qu'il existe a et a' dans S_1 tels que $a - a'$ appartient à H. Écrivons $a = t + k$ et $a' = t' + k'$ comme précédemment. Alors $a - a' = t - t' + k - k'$, d'où $t - t' \in H$ et par suite $t = t'$, ce qui implique que $a - a' = k - k'$

appartient à K. Les ensembles ΔS_1 et $H\setminus K = K+1/2$ sont donc disjoints. Or, K est clairement dense dans $\mathbf{R}$, de même que $K+1/2$, et ainsi $\mathbf{R}\setminus\Delta S_1$ contient un ensemble dense et est donc lui-même dense, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Théorème 109. *Soit $d \geq 2$ un entier. Toute partie bornée de $\mathbf{R}^d$ appartient à $\mathscr{Q}_G$.*

Preuve. Soit $\{S_1, S_2\}$ une partition de $\mathbf{R}$ comme dans l'énoncé du lemme 108. Notons $S_{ij} = S_i \times S_j \times \mathbf{R}^{d-2}$. Soient C une partie bornée de $\mathbf{R}^d$ et $r > \operatorname{diam} C$ un nombre réel, et notons $C_{ij} = C \cap S_{ij}$, de sorte que $\mathscr{C} = \{C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}\}$ est une partition de C. Par le lemme 107, il suffit de montrer que chaque C_{ij} apartient à $\mathscr{Q}_G$ et de plus que $\mathscr{C}$ est un ensemble G-extricable. Il est évident que $\mathscr{C}$ est G-extricable, car les C_{ij} peuvent être librement translatés le long des deux premières coordonnées. Explicitement, les applications $f_{ij}\colon [0,1] \to G$ où $f_{ij}(t)$ est la translation de vecteur égal à $(2irt, 0, \ldots, 0)$ si $t \leq 1/2$ et à $(ir, (2i+j)(2t-1)r, 0, \ldots, 0)$ si $t > 1/2$, qui sont continues et vérifient $f_{ij}(t)(C_{ij}) \cap f_{kl}(t)(C_{kl}) = \varnothing$ si $(i,j) \neq (k,l)$, font que $(C_{11}) + (C_{12}) + (C_{21}) + (C_{22}) = (C)$.

Pour montrer que chaque C_{ij} appartient à $\mathscr{Q}_G$, on considère deux sous-ensembles de C_{ij} disjoints A et B. Vu que $\mathbf{R}\setminus\Delta S_1$ et $\mathbf{R}\setminus\Delta S_2$ sont denses dans $\mathbf{R}$, il existe des suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et telles que $\{a_n | n \in \mathbf{N}\} \cap \Delta S_1$ et $\{b_n | n \in \mathbf{N}\} \cap \Delta S_2$ sont vides. Pour un entier $n \geq 1$, soit τ_{2n} la translation de vecteur $(a_{n-1}, b_n, 0, \ldots, 0)$ et τ_{2n+1} la translation de vecteur $(a_n, b_n, 0, \ldots, 0)$. Soit en outre τ_0 la translation de vecteur $(r, b_0, 0, \ldots, 0)$. Les τ_n sont des éléments de T. Nous définissons une application $f\colon [0,1] \to G$ de la manière suivante :

$$f(0) = 0,$$
$$f(t) = \left(\frac{t - 2^{-k-1}}{2^{-k} - 2^{-k-1}}\right)\tau_k + \left(1 - \frac{t - 2^{-k-1}}{2^{-k} - 2^{-k-1}}\right)\tau_{k+1} \quad \text{si} \quad 2^{-k-1} < t \leq 2^{-k}.$$

Alors f est continue par le principe du recollement. Pour tout t dans $[0,1]$, le vecteur de la translation $f(t)$ n'appartient pas à $\Delta S_i \times \Delta S_j \times \mathbf{R}^{d-2}$. Or, si $(a,b) = (c,d) + (r,s)$ avec (a,b) et (c,d) dans $S_i \times S_j$ et (r,s) dans $\mathbf{R}^2$, alors $r \in \Delta S_i$ et $s \in \Delta S_j$. Ainsi, $C_{ij} \cap f(t)(C_{ij}) = \varnothing$ pour tout t dans $[0,1]$; en particulier, $A \cap f(t)(B) = \varnothing$. De plus, $f(1)(B) = \tau_0(B) = B + (r, b_0, 0, \ldots, 0)$. Pour résumer, les applications continues $\gamma_1\colon [0,1] \to G$ et $\gamma_2\colon [0,1] \to G$ définies par $\gamma_1(t) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$ et $\gamma_2(t) = f(t)$ vérifient

1. $\gamma_1(0) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$ et $\gamma_2(0) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$,
2. $\gamma_1(1)(A) = A$ et $\gamma_2(1)(B) = B + (r, b_0, 0, \ldots, 0)$,
3. $\gamma_1(t)(A) \cap \gamma_2(t)(B) = \varnothing$ pour tout t dans $[0,1]$.

En d'autres termes, $A \cup B \approx_G A \cup (B + (r, b_0, 0, \ldots, 0))$. Vu que $r > \operatorname{diam} C \geq \operatorname{diam} C_{ij}$, $(A \cup (B + (r, b_0, 0, \ldots, 0))) = (A) + (B)$ par la définition de $(A) + (B)$, et par transitivité $(A \cup B) = (A) + (B)$.

Toute paire de sous-ensembles disjoints de C_{ij} est donc G-extricable. Ceci montre que les C_{ij}, et par suite C, appartiennent à $\mathscr{Q}_G$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire 110. *Soient $d \geq 2$ un entier et A une partie bornée non vide de $\mathbf{R}^d$. Alors toute décomposition de A est G-extricable. En d'autres termes, si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une décomposition de A (indicée injectivement), alors $\sum_{i=1}^n (A_i) = (A)$.*

Théorème 111. *Soient $d \geq 2$ un entier et G un groupe de transformations affines de $\mathbf{R}^d$ vérifiant*

1. *T est inclus dans G,*
2. *G est connexe par arcs.*

Alors les relations de G-équidécomposabilité et de G-équidécomposabilité continue coïncident sur l'ensemble des parties bornées de $\mathbf{R}^d$.

Preuve. Soient A et B des parties bornées de $\mathbf{R}^d$ avec $A \sim_G B$. Il existe des décompositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A et B (avec indiçages injectifs) et des éléments $g_1, \ldots, g_n$ de G vérifiant $g_i(A_i) = B_i$ pour tout i. Puisque G est connexe par arcs, il existe des applications continues $\gamma_i\colon [0,1] \to G$ telles que $\gamma_i(0) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$ et $\gamma_i(1) = g_i$. Ceci montre que $A_i \approx_G B_i$ (avec un seul morceau) pour tout i. Par le corollaire 110, $(A) = \sum_{i=1}^n (A_i) = \sum_{i=1}^n (B_i) = (B)$, c'est-à-dire $A \approx_G B$. $\square$

Le paradoxe de Banach–Tarski, le paradoxe de von Neumann et la quadrature du cercle, notamment, sont donc réalisables de manière continue :

Corollaire 112. *Soit $d \geq 3$ un entier. Deux parties de $\mathbf{R}^d$ bornées et d'intérieurs non vides sont continûment $D_d(\mathbf{R})$-équidécomposables.*

Corollaire 113. *Deux parties de $\mathbf{R}^2$ bornées et d'intérieurs non vides sont continûment $SA_2(\mathbf{Z})$-équidécomposables.*

***Corollaire 114.** *Si D et Q sont des parties de $\mathbf{R}^2$ comme dans l'énoncé du théorème 74, alors D et Q sont continûment $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposables. En particulier, tout disque fermé est continûment $T_2(\mathbf{R})$-équidécomposable à un carré de même aire.*

T. M. Wilson conclut, en analysant les preuves des théorèmes ci-dessus, que la duplication de la boule $\mathbf{B}^3$ peut se faire continûment avec 41 morceaux. Une analyse plus grossière de la preuve du théorème 109 montre que si deux parties de $\mathbf{R}^d$ sont G-équidécomposables avec r morceaux (où G et connexe par arcs et $T \subseteq G \subset GA_d(\mathbf{R})$), alors elles sont continûment G-équidécomposables avec $16r$ morceaux ou moins, chacun des morceaux intiaux étant décomposé deux fois en quatre pour être extriqué successivement des deux parties.

B La mesure de Jordan

Nous montrons ici l'existence d'une mesure sur un sous-anneau de $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$ qui s'annule sur les ensembles nulle part denses. On note $\mathscr{K}$ l'ensemble dont les éléments sont des réunions finies (éventuellement vides) d'ensembles de la forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ où a_i et b_i sont des nombres réels avec $a_i < b_i$. Il est clair que la réunion et l'intersection de deux éléments de $\mathscr{K}$ est encore dans $\mathscr{K}$, et que si A et B sont dans $\mathscr{K}$, alors $A \setminus \mathring{B}$ l'est également. En outre, tout élément de $\mathscr{K}$ est de la forme $\bigcup \mathscr{X}$ où $\mathscr{X}$ est un ensemble fini dont les éléments sont des produits d'intervalles comme ci-dessus et sont d'intérieurs deux à deux disjoints ; un tel ensemble $\mathscr{X}$ sera appelé *convenable*. Ceci permet de définir de manière évidente le *volume* d'un élément K de $\mathscr{K}$, que l'on note $\mathrm{Vol}(K)$.

Soit B une partie bornée de $\mathbf{R}^d$. Le *volume intérieur* de B, noté $v_*(B)$, est le nombre réel $\sup\{\mathrm{Vol}(K) \mid K \in \mathscr{K} \text{ et } K \subseteq B\}$; le *volume extérieur* de B, noté $v^*(B)$, est le nombre réel $\inf\{\mathrm{Vol}(K) | K \in \mathscr{K} \text{ et } K \supseteq B\}$. On dit que B est *mesurable au sens de Jordan* si $v_*(B) = v^*(B)$, et ce nombre est alors appelé le *volume* ou la *mesure de Jordan* (ou encore l'*aire* si $d = 2$) de B et est noté $v(B)$. On note $\mathscr{J}$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbf{R}^d$ qui sont mesurables au sens de Jordan.

Il est immédiat de la définition qu'un élément de $\mathscr{J}$ est aussi mesurable au sens de Lebesgue et que la mesure de Jordan coïncide avec la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{J}$, car $v_*(B) \leq \lambda_*(B) \leq \lambda^*(B) \leq v^*(B)$ pour toute partie bornée B de $\mathbf{R}^d$, où λ_* et λ^* désignent les mesures de Lebesgue intérieure et extérieure.

Nous allons maintenant justifier les termes « mesurable » et « mesure » que nous avons utilisé pour dénommer $\mathscr{J}$ et v.

Lemme 115. *Si A est une partie bornée de $\mathbf{R}^d$, $v^*(A) = \inf\{\mathrm{Vol}(K) \mid K \in \mathscr{K} \text{ et } \mathring{K} \supseteq B\}$.*

Preuve. Notons $c = \inf\{\mathrm{Vol}(K) \mid K \in \mathscr{K} \text{ et } \mathring{K} \supseteq B\}$. Il est clair que $v^*(A) \leq c$. Soient $\varepsilon > 0$ un nombre réel et K dans $\mathscr{K}$ avec $A \subseteq K$ et $\mathrm{Vol}(K) < v^*(A) + \varepsilon/2$. Choisissons K' dans $\mathscr{K}$ tel que $K \subseteq \mathring{K}'$ et $\mathrm{Vol}(K') < \mathrm{Vol}(K) + \varepsilon/2$. Alors $A \subseteq \mathring{K}'$ et $\mathrm{Vol}(K') < v^*(A) + \varepsilon$. Par conséquent, $c \leq v^*(A)$. $\square$

Théorème 116. *Pour qu'une partie bornée de $\mathbf{R}^d$ soit mesurable au sens de Jordan, il faut et il suffit que le volume extérieur de sa frontière soit nul.*

Preuve. Soit A une partie bornée de $\mathbf{R}^d$. Supposons dans un premier temps que A est mesurable au sens de Jordan, et soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il existe des éléments A_* et A^* de $\mathscr{K}$ tels que $A_* \subseteq A \subseteq A^*$ et $\mathrm{Vol}(A^*) - \mathrm{Vol}(A_*) = \mathrm{Vol}(A^* \setminus \mathring{A}_*) < \varepsilon$. Il suffit de montrer que $\partial A \subseteq A^* \setminus \mathring{A}_*$, car cela implique, puisque ε est arbitraire, que $v^*(\partial A) = 0$. Soit a dans ∂A. Alors a appartient à l'adhérence de A, et vu que A^* est fermé, a appartient à A^*. De plus, $\mathring{A}_*$ est inclus dans $\mathring{A}$ qui est disjoint de ∂A, ce qui montre que a n'appartient pas à $\mathring{A}_*$.

Réciproquement, supposons que $v^*(\partial A) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Par le lemme 115, il existe un élément K de $\mathscr{K}$ tel que $\partial A \subseteq \mathring{K}$ et $\mathrm{Vol}(K) < \varepsilon$. Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$ deux ensembles convenables tels que $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X}'$, $K = \bigcup \mathscr{X}$ et $A \subseteq \bigcup \mathscr{X}'$. Nous montrons que tous les éléments de $\mathscr{X}'$ qui ont des intersections non vides avec A et $\mathbf{R}^d \setminus A$ sont des éléments de $\mathscr{X}$. Soit R dans $\mathscr{X}'$ avec $x \in R \cap A$ et $y \in R \cap (\mathbf{R}^d \setminus A)$. Considérons l'application $f \colon [0,1] \to \mathbf{R}^d$ définie par $f(t) = x + t(y - x)$: c'est une paramétrisation du segment reliant x à y. Soit t_0 le supremum de $\{t \in [0,1] \mid f(t) \in A\}$. Tout voisinage de $f(t_0)$ coupe à la fois A et $\mathbf{R}^d \setminus A$, ce qui signifie que $f(t_0)$ appartient à ∂A. D'autre part, $f(t_0)$ appartient à R car R est convexe, et donc $R \cap \partial A \neq \varnothing$. Mais puisque $\partial A \subseteq \mathring{K}$, tous les éléments de $\mathscr{X}' \setminus \mathscr{X}$, étant disjoints de $\mathring{K}$, sont aussi disjoints de ∂A, et par conséquent $R \in \mathscr{X}$. Soit $\mathscr{X}'' = \{X \in \mathscr{X}' \mid X \cap A \neq \varnothing\} \cup \mathscr{X}$. Alors $A^* = \bigcup \mathscr{X}''$ et $A_* = \bigcup(\mathscr{X}'' \setminus \mathscr{X})$ sont des éléments de $\mathscr{K}$ vérifiant $A_* \subseteq A \subseteq A^*$, et de plus $\mathrm{Vol}(A^*) - \mathrm{Vol}(A_*) = \mathrm{Vol}(A^* \setminus \mathring{A}_*) = \mathrm{Vol}(K) < \varepsilon$. □

Corollaire 117. *$\mathscr{J}$ est un sous-anneau de l'algèbre booléenne $\mathscr{P}(\mathbf{R}^d)$.*

Preuve. Nous devons montrer que si A et B sont des éléments de $\mathscr{J}$, alors $A \cup B$ et $A \setminus B$ sont aussi dans $\mathscr{J}$. Nous utilisons le théorème 116. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il existe des éléments K et L de $\mathscr{K}$ tels que $\partial A \subseteq K$, $\partial B \subseteq L$, $\mathrm{Vol}(K) < \varepsilon/2$ et $\mathrm{Vol}(L) < \varepsilon/2$. Puisque $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, il s'ensuit que $\partial(A \cup B) \subseteq K \cup L$. Mais $\mathrm{Vol}(K \cup L) < \varepsilon$, et donc $v^*(\partial(A \cup B)) = 0$, c'est-à-dire $A \cup B \in \mathscr{J}$. De même, $\partial(A \setminus B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, d'où $A \setminus B \in \mathscr{J}$. □

Corollaire 118. *La mesure de Jordan est une mesure sur $\mathscr{J}$.*

Preuve. L'additivité de la mesure de Jordan découle de celle de la mesure de Lebesgue, et d'autre part $v(\varnothing) = \lambda(\varnothing) = 0$. □

Nous savons déjà que les éléments de $\mathscr{J}$ sont mesurables au sens de Lebesgue. D'autre part, le théorème 116 montre que les éléments de $\mathscr{J}$ ont la *propriété de Baire*, autrement dit, tout élément de $\mathscr{J}$ diffère d'un borélien par un ensemble maigre : si A appartient à $\mathscr{J}$, alors A diffère de son adhérence par un sous-ensemble de ∂A qui est nulle part dense par le théorème 116. En effet, $v(A) = 0$ si et seulement si l'unique élément de $\mathscr{K}$ inclus dans A est l'ensemble vide, et cela revient à dire que l'intérieur de A est vide ; puisque le volume de l'adhérence de A est égal au volume de A, ceci a lieu si et seulement si A est nulle part dense. En définitive, les assertions suivantes sont équivalentes pour A dans $\mathscr{J}$: $v(A) = 0$; $\lambda(A) = 0$; A est d'intérieur vide ; A est nulle part dense.

Références

[1] S. Banach, A. Tarski, « Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes », *Fundamenta Mathematicae*, **6** (1924), 244–277

[2] A. Borel, “On free subgroups of semi-simple groups”, *L'Enseignement Mathématique*, **29** (1983), 151–164

[3] R. Dougherty, M. Foreman, “Banach–Tarski decompositions using sets with the property of Baire”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **89** (1992), 10726–10728

[4] R. Dougherty, M. Foreman, “Banach–Tarski decompositions using sets with the property of Baire”, `http://www.math.uci.edu/sub2/Foreman/homepage/BT.pdf` (1992)

[5] L. Fejes Tóth, „Elementarer beweis einer isoperimetrischen Ungleichung“, *Acta Mathematica Acedemiae Scientarum Hungaricae*, **1** (1950), 273–275

[6] O. Frink Jr., “Jordan measure and Riemann integration”, *The Annals of Mathematics*, **34** 3 (1933), 518–526

[7] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand–Reinhold Company, New York, 1969

[8] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965

[9] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley, New York, 1974

[10] M. Laczkovich, “Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's cicle-squaring problem”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **404** (1990), 77–117

[11] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Dover Publications, New York, 1976

[12] J. Mycielski, “Almost every function is independant”, *Fundamenta Mathematicae*, **81** (1973), 43–48

[13] J. von Neumann, „Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen“, *Mathematische Annalen*, **99** (1928), 134–141

[14] J. M. H. Olmsted, *Real Variables*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1959

[15] A. Yu. Ol'shanskii, “Infinite groups with cyclic subgroups”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **245** (1979), 785–788

[16] A. Yu. Ol'shanskii, “An infinite simple Noetherian torsion-free group”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, **43** (1979), 1428–1493

[17] J.-P. Pier, *Amenable locally compact groups*, Wiley, New York, 1984

[18] R. Rado, “Factorization of even graphs”, *The Quartely Journal of Mathematics*, **20** (1949), 95–104

[19] R. M. Solovay, “A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”, *Annals of Mathematics*, **92** (1970), 1–56

[20] S. Świerczkowski, “On a free group of rotations of the Euclidean space”, *Indagationes Mathematicae*, **20** (1958), 376–378

[21] J. K. Truss, “The failure of cancellation laws for equidecomposability types”, *Canadian Journal of Mathematics*, **42** (1990), 590–606

[22] S. Wagon, “Partitioning intervals, spheres and balls into congruent pieces”, *Canadian Mathematical Bulletin*, **26** (1983), 337–340

[23] S. Wagon, *The Banach–Tarski paradox*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[24] T. M. Wilson, “A continuous movement version of the Banach–Tarski paradox: a solution to de Groot's problem”, *The Journal of Symbolic Logic*, **70** 3 (2005), 946–956

Marc Hoyois, 17 février 2007

Index

- $\mathscr{C}_G$, 3
- $\mathscr{E}_G$, 3
- $\mathscr{E}_G^n$, 3
- $\sim_G$, 4
- $\sim_G^n$, 4
- $\precsim_G$, 4
- $\mathscr{S}_G$, 4
- $\sim_G^\infty$, 5
- $D_d(\mathbf{R})$, 6
- $SO_d(\mathbf{R})$, 6
- $T_d(\mathbf{R})$, 6
- F_κ, 6
- G^*, 14
- X°, 14
- $\mathscr{T}_0(G, X)$, 14
- $\mathscr{T}_1(G, X)$, 15
- $\mathrm{adj}_{\mathscr{G}}(U)$, 16
- $O_d(\mathbf{R})$, 27
- $SL_d(\mathbf{Z})$, $SL_d(\mathbf{R})$, 30
- $SA_d(\mathbf{Z})$, 31
- $\sim_\varepsilon$, 33
- $\precsim_\varepsilon$, 33
- ${}_g f$, 34
- $L^\infty(X, \mathbf{R})$, 34
- γ_S, 39
- $\vee$, 42
- $\wedge$, 42
- $\neg$, 42
- $\mathbf{0}$, 42
- $\mathbf{1}$, 42
- $\leq$, 42
- $\setminus$, 42
- $\triangle$, 42
- $\mathscr{A}_b$, 43
- $\approx_G$, 47
- $\precapprox_G$, 47
- $\mathscr{Q}_G$, 48
- $\mathscr{K}$, 50
- $\mathscr{J}$, 50

- action (groupes)
  - libre, 6
  - localement commutative, 6
  - sur une algèbre booléenne, 44
- aire, 50
- algèbre booléenne, 42
  - atomique, 43
  - quotient, 43
- application d'incidence (graphes), 16
- application homothétique, 33
- arête (graphes), 16
- atome, 43

- base (groupes), 8

- chemin (graphes), 16
- complément (alg. bool.), 42
- composante connexe (graphes), 16
- congruence, 3
  - avec n morceaux, 3
  - par dissection, 13
  - par morceaux, 3
- couplage (graphes), 16
- courbe simple fermée, 32
- croissance (groupes), 39

- décomposition, 3
  - polygonale, 13
- degré (graphes), 16
- différence (alg. bool.), 42
- différence symétrique (alg. bool.), 42
- divisibilité (G-ens.), 12
- domaine de Jordan, 32

- élément borné (monoïdes), 37
- éléments disjoints (alg. bool.), 42
- équation de congruence (sys. cong.), 8
  - complémentaire, 8
- équidécomposabilité, 3
  - avec n morceaux, 3
  - continue, 47
  - dénombrable, 5
  - homothétique, 33
- extrémité (graphes), 16
- extricabilité, 48

- factorisation (graphes), 16

- graphe, 16
  - biparti, 16
  - équilibré, 16
  - factorisable, 16
  - localement fini, 16
  - régulier, 16
  - restreint, 16
- groupe
  - à croissance exponentielle, 41
  - exponentiellement borné, 41
  - moyennable, 34
  - périodique, 8
  - supramoyennable, 39

- homomorphisme (alg. bool.), 43

- idéal (alg. bool.), 42
- inclusion (alg. bool.), 42
- indépendance (groupes), 6

indépendance algébrique, 25
indiçage injectif, 3
intersection (alg. bool.), 42

mesurabilité au sens de Jordan, 50
mesure, 34
  additive, 34
  invariante, 34
  σ-additive, 34
  universelle, 34
mesure (alg. bool.), 43
  invariante, 45
mesure (G-ens.), 34
mesure (groupes), 34
mesure de Jordan, 50
mot réduit, 6
moyennabilité (G-ens.), 34
moyennabilité (groupes), 34
moyenne (G-ens.), 34
  invariante, 34

négligeabilité (G-ens.), 34
négligeabilité (groupes), 34
niveau (types), 14
nombres de von Neumann, 25
normaliser, 34

paradoxalité (G-ens.), 5
  avec n morceaux, 5
  dénombrable, 5
paradoxalité (groupes), 6
paradoxe de Banach–Tarski, 21
paradoxe de Hausdorff, 20
paradoxe de la sphère, 20
paradoxe de Sierpiński–Mazurkiewicz, 29
paradoxe de von Neumann dans le plan, 32
partie bornée (types), 14
partie équilibrée (graphes), 16
partie invariante (alg. bool.), 45
partie libre (graphes), 16
partie libre (groupes), 6
partition, 3
  stricte, 3
polygone, 13
propriété d'extension invariante, 45

restriction (alg. bool.), 43
restriction (graphes), 16

solution (sys. cong.), 8
  complète, 8
sommet (graphes), 16
  adjacent, 16
sous-algèbre (alg. bool.), 43
  engendrée, 43
sous-anneau (alg. bool.), 43
subdécomposabilité, 4
  continue, 47
  dénombrable, 5
  homothétique, 33
supramoyennabilité (G-ens.), 39
supramoyennabilité (groupes), 39
système de congruences, 8
  faible, 8
  propre, 8

théorème de Banach–Schröder–Bernstein, 4
théorème de Banach–Tarski, 22
théorème de Bolyai–Gerwien, 13
théorème de Kőnig, 18
théorème de Mycielski, 25
théorème de représentation de Stone (cas fini), 43
théorème de Schröder–Bernstein, 4
théorème de Tarski, 39
type d'équidécomposabilité, 14
  continue, 47

union (alg. bool.), 42
unité (alg. bool.), 42

volume, 50
  extérieur, 50
  intérieur, 50

zéro (alg. bool.), 42