Caractère de Chern et géométrie algébrique dérivée

Marc Hoyois

marc.hoyois@epfl.ch

Travail de Master réalisé sous la direction de
Prof. **Kathryn Hess Bellwald**

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Résumé. On étudie une construction du caractère de Chern d'un fibré vectoriel sur un champ dérivé esquissée dans [**TV08**].

1. Le caractère de Chern classique

En géométrie différentielle, le caractère de Chern associé à une variété différentiable X est une application

$$\mathrm{ch}_0 \colon K^0(X) \to \prod_{n\geq 0} H^{2n}(X, \mathbb{C})$$

de la K-théorie complexe de X vers la cohomologie de X en degrés pairs. On peut définir le caractère de Chern soit par une construction purement différentielle (la courbure de la connexion de Levi-Civita), soit par une construction de topologie algébrique (les classes de Chern), mais l'application ch_0 est essentiellement algébrique. On peut en effet définir, pour n'importe quelle algèbre commutative A sur un anneau k, une application

$$\mathrm{ch}_0 \colon K_0(A) \to \prod_{n\geq 0} H^{\mathrm{dR}}_{2n}(A)$$

de la K-théorie de A vers l'homologie de de Rham de A, qui coincide avec l'application précédente lorsque A est l'algèbre des fonctions complexes différentiables sur X. La composante 0 du caractère de Chern est la *trace* $\mathrm{tr}\colon K_0(A) \to H^{\mathrm{dR}}_0(A) \subset A$, qui envoie un A-module projectif de type fini M sur la trace d'une matrice idempotente ayant M pour image.

Un traitement plus moderne du caractère de Chern fait appel à l'homologie de Hochschild $HH_*(A)$ et à l'homologie cyclique négative $HC^-_*(A)$ d'une algèbre A. L'homologie de Hochschild de A est l'homologie d'un objet simplicial de la forme

$$\cdots \substack{\to\\\to\\\to\\\to} A\otimes A\otimes A \substack{\to\\\to\\\to} A\otimes A \rightrightarrows A.$$

La définition de l'homologie cyclique négative est un peu plus compliquée. Un résultat non trivial est l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}_0"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "\mathrm{ch}_0^-"'] & A = HH_0(A) \\
& \prod_{n\geq 0} H^{\mathrm{dR}}_{2n}(A) \arrow[u] \\
& HC_0^-(A). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ceci permet de voir le caractère de Chern ch_0^- comme un relèvement de la trace à l'homologie cyclique négative. L'application ch_0^- contient ainsi toute l'information de l'application plus compliquée ch_0. De plus, l'homologie de Hochschild, l'homologie cyclique négative et l'application ch_0^- sont aussi définies pour des algèbres non commutatives, ce qui n'est pas le cas de l'homologie de de Rham. Comme la notation le suggère, il existe aussi des caractères de Chern généralisés $\mathrm{ch}_n\colon K_n(A) \to HC_n^-(A)$ pour tout $n \geq 1$, utiles à l'étude de la K-théorie supérieure de A.

> *"La nature du caractère de Chern s'illumine géométriquement lorsque l'on plonge la catégorie des algèbres dans la catégorie des algèbres simpliciales"*

Les définitions de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique négative ainsi que la nature du caractère de Chern s'illuminent géométriquement lorsque l'on plonge la catégorie Alg_k des algèbres commutatives dans la catégorie sAlg_k des algèbres commutatives *simpliciales*. Ce sont, entre autres, des observations comme celle-ci qui motivent l'étude de la *géométrie algébrique dérivée*.

2. Champs dérivés

En bref, les champs dérivés sont aux algèbres simpliciales ce que les champs de la géométrie algébrique classique sont aux algèbres.

En géométrie algébrique classique, un préchamp est un préfaisceaux en groupoïdes sur $\mathrm{Alg}_k^{\mathrm{op}}$, c'est-à-dire un foncteur $\mathrm{Alg}_k \to (\text{Groupoïdes})$. Un champ est un préchamp vérifiant une propriété particulière, dite propriété de descente, par rapport à une topologie sur $\mathrm{Alg}_k^{\mathrm{op}}$ fixée au préalable.

Lorsqu'on remplace les algèbres par les algèbres simpliciales, il faut prendre en compte la structure homotopique de sAlg_k pour définir les notions correctes de préchamp et de champ. On devra par exemple remplacer la catégorie des groupoïdes par sa version homotopique, à savoir la catégorie des ∞-groupoïdes dont un modèle est la catégorie des ensembles simpliciaux.

> *"Les champs dérivés sont aux algèbres simpliciales ce que les champs sont aux algèbres"*

La catégorie sAlg_k des algèbres commutatives simpliciales est une catégorie de modèles de Quillen. Dans cette situation, il existe une catégorie de modèles simpliciale $\mathrm{sAlg}_k^{\wedge}$ obtenue de $\mathrm{sAlg}_k^{\mathrm{op}}$ "en ajoutant librement les colimites homotopiques" ; on l'appelle la catégorie des *préchamps dérivés* sur $\mathrm{sAlg}_k^{\mathrm{op}}$. C'est l'analogue homotopique de la catégorie des préfaisceaux et ses objets sont les foncteurs $\mathrm{sAlg}_k \to \mathrm{sSet}$.

On peut munir la catégorie $\mathrm{sAlg}_k^{\mathrm{op}}$ de diverses topologies "à homotopie près" analogues à celles que l'on rencontre en géométrie algébrique classique : la topologie de Zariski, la topologie étale, la topologie plate, etc. On peut ensuite définir un *champ dérivé* comme un préchamp dérivé satisfaisant une certaine propriété de descente par rapport à la topologie choisie. Il existe en fait une catégorie des champs dérivés qui est une catégorie de modèles simpliciale $\mathrm{sAlg}_k^{\sim}$.

Les relations entre ces différents objets géométriques sont résumées dans le diagramme suivant, où les paires de flèches sont des adjonctions :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}_k \arrow[rr, "\text{faisceaux}"] \arrow[drr, "\text{champs}"] \arrow[ddrr, "\infty\text{-champs}"'] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{Set} \arrow[d, shift left] \\
& & (\text{Groupoïdes}) \arrow[u, shift left, "\pi_0"] \arrow[d, shift left, "\text{nerf}"] \\
\mathrm{sAlg}_k \arrow[uu, shift right, "\text{troncature}"'] \arrow[rr, "\text{champs dérivés}"'] & & \mathrm{sSet}. \arrow[u, shift left, "\Pi_1"]
\end{tikzcd}$$

3. Interprétation géométrique de HH_* et HC_*^-

Soit X un champ dérivé. La structure simpliciale de la catégorie des champs dérivés $\mathrm{sAlg}_k^{\sim}$ permet de définir pour tout ensemble simplicial K les champs $K\otimes X$ et X^K. On définit en particulier *l'espace de lacets libres* de X comme

$$LX = X^{S^1}$$

où S^1 est un modèle simplicial du groupe topologique S^1. La construction de l'espace de lacets libres est alors duale à celle de l'homologie de Hochschild :

Théorème 1. *Soit A une algèbre et $X = \mathrm{Spec}\,A$ le champ dérivé affine correspondant. Alors le champ LX est également affine et l'homologie de Hochschild de A s'identifie à l'homologie de l'algèbre simpliciale des fonctions sur LX.*

En fait, LX n'est autre que le Spec de l'algèbre simpliciale qui définit l'homologie de Hochschild de A.

> *"La construction de l'espace de lacets libres est duale à celle de l'homologie de Hochschild"*

L'espace de lacets LX est muni d'une action naturelle du groupe simplicial S^1 qui fait tourner les lacets. L'homologie cyclique négative s'interprète alors comme les points fixes homotopiques de cette action :

Théorème 2. *Soit A une algèbre et $X = \mathrm{Spec}\,A$ le champ dérivé affine correspondant. Alors l'homologie cyclique négative de A s'identifie à l'homologie de l'algèbre simpliciale des fonctions S^1-équivariantes à homotopie près sur LX.*

4. Le caractère de Chern

La notion de caractère de Chern apparaît dès que l'on s'intéresse à classifier des familles d'objets paramétrées par des objets géométriques avec la propriété que la catégorie de ces objets au-dessus d'un objet quelconque est une $(\infty,1)$-catégorie monoïdale *rigide*. L'exemple principal qui nous intéresse est celui des fibrés vectoriels sur les champs dérivés. Pour tout champ dérivé X, ceux-ci forment en effet une catégorie monoïdale rigide Vect_X. L'observation principale est que la donnée d'un objet de $\mathrm{Vect}_{S^1\otimes X}$ est équivalente à la donnée d'un objet de Vect_X ainsi qu'une autoéquivalence de cet objet. Si V est un fibré vectoriel sur X, son pullback par l'application d'évaluation

$$\mathrm{ev}\colon S^1\otimes LX = S^1 \otimes X^{S^1} \to X$$

est donc un fibré vectoriel sur $S^1\otimes LX$, c'est-à-dire un fibré vectoriel V' sur LX avec une autoéquivalence u. Comme la catégorie monoïdale Vect_{LX} est rigide, on peut considérer la trace de u, et c'est par définition le caractère de Chern de V. Avec l'identification du théorème 1, c'est un élément de $HH_0(A)$ où A est l'algèbre simpliciale des fonctions sur X.

On peut décrire plus explicitement le couple (V', u). Soit $PX = X^{\Delta^1}$ *l'espace de chemins* de X. Il y a un morphisme $LX \to PX$ envoyant un lacet sur son chemin sous-jacent. Ce morphisme peut être vu comme une homotopie de la projection

$$p = \mathrm{ev}(*,-)\colon LX \to X$$

vers elle-même. Or, on peut montrer qu'une homotopie H entre deux morphismes $f, g\colon Y \to X$ induit une équivalence $H^*(V)\colon f^*(V) \xrightarrow{\sim} g^*(V)$ de fibrés vectoriels sur Y. Cela résulte d'une propriété fondamentale des fibrés vectoriels sur les champs dérivés : si X et Y sont des champs dérivés équivalents, alors les théories homotopiques des fibrés vectoriels sur X et Y sont également équivalentes. Appliquant ceci à l'homotopie $H\colon LX \to PX$, on obtient une autoéquivalence $H^*(V)$ de $p^*(V)$.

Théorème 3. $V' = p^*(V)$ *et* $u = H^*(V)$.

Finalement, on montre que ce caractère de Chern est une extension du caractère de Chern classique :

Théorème 4. *Soient A est une algèbre et $M \in K_0(A)$ un A-module projectif de type fini. Alors M induit un fibré vectoriel sur $\mathrm{Spec}\,A$ dont le caractère de Chern est* $\mathrm{tr}(M) \in HH_0(A)$.

Vu le théorème 2, la question du relèvement de ce caractère de Chern à l'homologie cyclique négative peut se reformuler ainsi : le caractère de Chern est-il S^1-équivariant ? Dans la cas général d'un fibré vectoriel sur un champ dérivé, cela reste une conjecture.

Références. [TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *A note on Chern character, loop spaces and derived algebraic geometry*, 2008, arXiv:0804.1274v2 [math.AG]